Serie 2

1. Die Normen $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ und $||\cdot||_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ sind definiert durch

$$||x||_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad ||x||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \qquad ||x||_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Zwei Normen $||\cdot||$ und $||\cdot||'$ auf einem reellen Vektorraum V heissen äquivalent, falls eine Konstante $c > 0$ existiert, sodass

$$\frac{1}{c}||v|| \leq ||v||' \leq c||v|| \quad \text{für alle } v \in V.$$

(a) Verifiziere die Normaxiome für $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ und $||\cdot||_\infty$ explizit.

(b) Zeige, dass diese Normen äquivalent sind.

*(c) Konstruiere zwei nicht äquivalente Normen auf $\mathbb{R}^\infty := \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$.

2. Wir betrachten die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der *Französischen Eisenbahnmetrik*:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2\colon\ d(x,y) := \begin{cases} ||x-y||_2 & \text{wenn } x, y \text{ und } (0,0) \text{ auf derselben Geraden liegen,} \\ ||x||_2 + ||y||_2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Verifiziere, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Zeige, dass diese nicht äquivalent zur euklidischen Metrik ist, z. B. indem Du die Konvergenz einer geeigneten Folge betrachtest.

3. Gegeben die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, bestimme jeweils, ob die Teilmenge offen, abgeschlossen oder keins von beiden ist und was die Häufungspunkte, Randpunkte und inneren Punkte sind.

(a) $A := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{1}{2} < ||x||_2 \leq 2 \right\}$

(b) $B := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 + x_2 = \frac{1}{n} \text{ für } n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$

(c) $C := \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \cup \{0\}$

(d) $D := \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

4. Untersuche die folgenden Funktionen auf ihre Stetigkeit:

   (a) die Addition von Vektoren $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

   (b) das Skalarprodukt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

   (c) das Vektorprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

5. Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} |y/x^2| \cdot 2^{-|y/x^2|} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Beweise, dass f an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig ist, während die Einschränkung $f|_G$ auf jede Gerade G durch den Nullpunkt stetig auf G ist.

6. Sei $||\cdot||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Der offene Einheitsball bezüglich dieser Norm ist definiert als

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| < 1\}\,.$$

   Zeige, dass dieser „Ball“ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

   (a) B is konvex (d. h. für alle $x, y \in B$ liegt die Strecke $\{(1-\lambda)x + \lambda y \mid \lambda \in [0,1]\}$ wieder in B.)

   (b) B ist offen.

   (c) $0 \in B$.

   (d) $\forall x \in \mathbb{R}^n \colon x \in B \Leftrightarrow -x \in B$.

   (e) $B \subset \mathbb{R}^n$ ist eine beschränkte Teilmenge bezüglich der euklidischen Norm.

Abgabe: in der Woche vom 5. März 2018, in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 28