Serie 3

1. Wir betrachten die Funktion

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-\pi)(y-1)^3}{(x-1)^2+|y-1|}, & \text{falls } (x,y) \neq (1,1) \\ -\pi, & \text{falls } (x,y) = (1,1)\,. \end{cases}$$

Ist g stetig an der Stelle (1,1)?
Was ist mit $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto ((x-1)g(x,y), (y-1)g(x,y))$?

2. Berechne das Matrixexponential

$$e^{tA} := \exp(tA) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

für die folgenden Matrizen.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 0 \\ 20 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. (a) Zeige für $A, T \in \mathbb{C}^{n\times n}$, T invertierbar die Identität

$$T^{-1} \cdot e^A \cdot T = e^{T^{-1}\cdot A\cdot T}$$

(b) Zeige für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Identität

$$\det\left(e^A\right) = e^{\operatorname{tr}(A)}$$

wobei $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ die Spur von A bezeichnet.
Tip: *Zeige zunächst, dass die Formel für eine Diagonalmatrix D und eine strikte obere Dreiecksmatrix N gilt. Benutze anschliessend ein Theorem aus der linearen Algebra (Jordan Normalform) welches besagt, dass für jede Matrix A ein Basiswechsel Q existiert, sodass $QAQ^{-1} = D + N$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix und N eine strikte obere Dreiecksmatrix N ist und zusätzlich $DN = ND$ gilt.*

4. Sei A eine $n \times n$ Matrix. Dann hat das homogene Anfangswertproblem (für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$)

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$

die Lösung

$$y(t) = e^{At} y_0.$$

(a) Löse das AWP

$$\ddot{f} + \omega^2 f = 0, \quad f(0) = 0, \quad \dot{f}(0) = 1$$

indem Du es in die obige Form überführst.
Tip: *Setze z. B.* $y_1 = f, y_2 = \dot{f}/\omega$.

(b) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Verifiziere, dass das inhomogene AWP

$$\frac{dy}{dt} = Ay + h(t), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$

die Lösung

$$y(t) = e^{At}\left(y_0 + \int_0^t e^{-As} h(s) ds\right)$$

besitzt.

(c) Benutze dies wiederum, um die allgemeine Lösung von

$$\ddot{f} + f = \frac{1}{cos(t)}, \quad f(0) = 0, \quad \dot{f}(0) = 1$$

zu finden.

5. Berechne alle partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:
   (a) $f(x, y) = x$
   (b) $f(x, y) = e^{xy}$
   (c) $f(x, y) = x^y$
   (d) $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$
   (e) $f(x, y) = x^2 y \sin(xy)$
   (f) $f(x, y, z) = xy^2 z^3$

6. Betrachte eine Abbildung

$$A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad (m, n \geq 1)$$

gegeben durch eine Matrix $A = (a_{ij})$.
Sei $||A||_{a,b}$ die **Operatornorm** von A, wobei $a.b \in \{1, 2, \infty\}$ und wir $\mathbb{R}^m$ mit der Norm $||\cdot||_a$ und $\mathbb{R}^n$ mit der Norm $||\cdot||_b$ ausstatten. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $||A||_{2,2}$ der grösste Singulärwert von A ist (die Spektralnorm) und $||A||_{\infty,\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ die Zeilensummennorm. Zeige analog:
   (a) $||A||_{1,1} = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ ist die Spaltensummennorm.
   (b) $||A||_{1,\infty} = \max_{ij} |a_{ij}|$ ist der grösste Eintrag.
   (c) $||A||_{2,\infty} = \max_i ||(a_{ij})_j||_2$ ist die grösste Zeilenvektorlänge.
   (d) $||A||_{1,2} = \max_j ||(a_{ij})_i||_2$ ist die grösste Spaltenvektorlänge.

Abgabe: in der Woche vom 12. März 2018, in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 28