Serie 4

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
Zeige:
   (a) f ist stetig differenzierbar.
   (b) $\partial_x \partial_y f$ und $\partial_y \partial_x f$ existieren und sind stetig auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
   (c) $\partial_x \partial_y f(0,0) = 1$ und $\partial_y \partial_x f(0,0) = -1$.

2. Sei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft
$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x) \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$
   (a) Zeige, dass im Ursprung die Richtungsableitung
$$\partial_v f(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t}$$
   für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ existiert.
   (b) Zeige, dass f im Ursprung nicht notwendigerweise differenzierbar ist.
   Hinweis: Betrachte zum Beispiel f definiert durch
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

3. Bestimme die Taylorpolynome vom Grad 2 an der Stelle a für die folgenden Funktionen.
   (a) $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ an der Stelle $a = (1,2)$.
   (b) $f(x,y,z) = ze^{\frac{x}{y}}$ an der Stelle $a = (1,1,1)$.
   (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ an der Stelle $a = (0,0,0)$.

4. Bestimme die Taylorreihen an der Stelle a für die folgenden Funktionen.
   (a) $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ an der Stelle $a = (1,2)$.
   (b) $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ an der Stelle $a = (0,0)$.
   Hinweis: *Für $z \in (-1,1)$ gilt die folgende Darstellung:*
$$\sqrt{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} z^n, \qquad \textit{wobei} \quad \binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{1 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdots (1 - 2(n-1))}{2^n n!}$$

5. Zeige, dass die folgenden Funktionen glatt, also unendlich oft differenzierbar sind, und berechne jeweils die partielle Ableitung und die zweite partielle Ableitung (Hesse-Matrix).
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x^3 - y^2)(6xy).$
   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = \sin(x^2y)z$
   (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2 + 2yz$
   (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x^5 + y^5)(y - 3\cos(x))$

Abgabe: in der Woche vom 19. März 2018, in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 28