Serie 5

1. Die Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$ sind durch die Abbildung

$$P : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad P(r,\phi) := \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

definiert.

(a) Zeige, dass P stetig differenzierbar ist und berechne die Ableitung dP.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und definiere $g(r,\phi) := f(P(r,\phi))$. Zeige, dass

$$\begin{aligned} \partial_x f(P(r,\phi)) &= \partial_r g(r,\phi)\cos(\phi) - \frac{1}{r}\sin(\phi)\partial_\phi g(r,\phi) \\ \partial_y f(P(r,\phi)) &= \partial_r g(r,\phi)\sin(\phi) + \frac{1}{r}\cos(\phi)\partial_\phi g(r,\phi). \end{aligned}$$

gilt und schliesse hieraus

$$\nabla f(P(r,\phi)) = \partial_r g(r,\phi) \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} + \frac{1}{r}\partial_\phi g(r,\phi) \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Hinweis: *Benutze die Kettenregel.*

(c) Berechne den Gradienten der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \log(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Hinweis: *In Polarkoordinaten ist f durch die Funktion $g(r,\phi) = \log(r)$ gegeben.*

2. Wir betrachten die Abbildungen

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ \ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + e^y \\ x+y \\ y \end{pmatrix}$$

und

$$\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ \ (u,v,w) \mapsto \begin{pmatrix} uv \\ w \end{pmatrix}.$$

Sei $\gamma = \beta \circ \alpha$. Berechne die Jacobi-Matrizen von α, β und γ.

3. Untersuche die folgenden Funktionen auf kritische Punkte und Extrema.

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

(b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$.

(c) $f(x,y) = (x-1)e^{-(x^2+y^2)}$

(d) $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$

4. Sei $f\colon V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ multilinear. Dann ist f differenzierbar und

$$df(a_1,\ldots,a_n)(h_1+\ldots+h_n) = f(h_1,a_2,\ldots,a_n)+f(a_1,h_2,a_3,\ldots,a_n)+\ldots+f(a_1,\ldots,a_{n-1},h_n)$$

   (a) Berechne die Ableitung des Kreuzproduktes $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

   (b) Berechne die Ableitung des Matrizenproduktes $\mathbb{R}^{(p\times q)} \times \mathbb{R}^{(q\times r)} \to \mathbb{R}^{(p\times r)}$.

   (c) Zeige, dass die Determinantenfunktion

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad f(A) := \det(A)$$

   stetig differenzierbar ist und

$$df(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad df(A)B = \operatorname{tr}(\operatorname{adj}(A)B), \tag{1}$$

   wobei $\operatorname{adj}(A)$ die sogenannte Adjunkte zu A ist mit Einträgen

$$(\operatorname{adj}(A))_{ji} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

   und A_{ij} aus A durch Weglassen der i-ten Zeile und j-ten Spalte gewonnen wird. Sofern $\det(A) \neq 0$, so gilt nach der Cramerschen Regel

$$A^{-1} = \operatorname{adj}(A)/\det(A),$$

   so, dass man (1) auch schreiben kann als

$$df(A)B = \operatorname{tr}(A^{-1}B)\det(A).$$

   Hinweis: *Betrachte* $\det(A)$ *als multilineare Funktion in den Zeilen (oder Spalten) von* A.

5. Es bezeichne $||\cdot||$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wie oft sind die folgenden Funktionen differenzierbar? (Welche der Funktionen in (a) - (c) sind konvex?)

   (a) $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := ||x||$.

   (b) $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_2(x) := ||x||^2$.

   (c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_3(x,y) := \begin{cases} xy\sin\left(\frac{1}{xy}\right) & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$.

   (d) $f_4 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_4(x) := \begin{cases} x\log(||x||) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

Abgabe: in der Woche vom 26. März 2018, in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 28