Serie 6

1. Eine Abbildung $V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ heisst multilinear, wenn sie linear in jedem Argument ist. Im Fall $n = 1$ sind dies gerade lineare Abbildungen, im Fall $n = 2$ heissen sie bilinear. (Hier seien die V_j und W endlich dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$.)

   (a) Entscheide, ob die folgenden Abbildungen multilinear sind:

   i. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 1$

   ii. $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad f(X, Y) = AXBYC$, wobei A, B, C (fest gewählte) $(n \times n)$-Matrizen sind.

   iii. $f(x) = ||x||$

   iv. $f(x) = ||x||^2$

   v. $f(x, y, z) = (x, y \times z)$ mit x, y, z in $\mathbb{R}^3$, (,)=Skalarprodukt

   (b) (Polarisationsformel) Jeder Multilinearform $f\colon \overbrace{V \times \ldots \times V}^{n\text{-mal}} \to W$ kann man eine Funktion
   $$F\colon V \to W$$
   zuordnen durch
   $$F(v) = f(v, v, ..., v)$$
   F ist eine polynomiale Funktion, homogen vom Grad n.
   Ist umgekehrt $F\colon V \to W$ polynomial vom Grad n, so kann man eine symmetrische Multilinearform (die Polarisation von F) definieren durch
   $$\mathrm{Pol}_F\colon V\times\ldots\times V \to W,\ \mathrm{Pol}_F(v_1, \ldots, v_n) = \frac{1}{n!}\frac{d}{dt_1}\cdots\frac{d}{dt_n}\bigg|_{t_1=\ldots=t_n=0} F(t_1v_1+\ldots+t_nv_n)$$
   Zeige, dass dann gilt
   $$F(v) = \mathrm{Pol}_F(v, ..., v). \tag{1}$$

   (c) Berechne jeweils den Grad und die Polarisation der folgenden homogenen polynomialen Funktionen

   i. $X \mapsto \mathrm{tr}(X^3)$ für X eine $(n \times n)$-Matrix

   ii. $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

   iii. $X \mapsto \det(X)$ für X eine $(n \times n)$-Matrix

   (d) Berechne die Ableitungen der Funktionen in 1.(c) i. und ii. unter Benutzung von (1) und der Produktregel aus der Vorlesung.

2. (a) Sei $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ eine C^2-Funktion und $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_m)\colon V \subset \mathbb{R}^n \to U$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $H_f = f''$ die Hessesche Matrix von f. Zeige, dass für die Hessesche Matrix von $F := f \circ \Psi$ gilt (für $a \in V$):
   $$H_F(a) = H_{f\circ\Psi}(a) = (\Psi')^T H_{f(\Psi(a))}(\Psi') + \sum_{j=1}^{m} \partial_j f(\Psi(a)) H_{\Psi_m}(a) \tag{2}$$
   Schreibe ausserdem die obige Formel in Komponenten:
   $$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(f(\Psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Psi_m(x_1, ..., x_n)) = \ldots$$

(b) Die auf $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion F sei in Polarkoordinaten gegeben durch $F(r,\phi) = r^3 e^{i\phi}$. Finde einen Ausdruck $f(x,y)$ für diese Funktion in Euklidischen Koordinaten. D. h. finde $f(x,y)$ so, dass $F(r,\phi) = f(r\cos\phi, r\sin\phi)$, also $F = f \circ \Psi$ mit $\Psi(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$.

Berechne dann die Hesseschen Matrizen von f und F in $(x,y) = (1,0)$ (bzw. $(r,\phi) = (1,0)$). Setzte das Ergebnis in (2) ein und verifiziere so Deine Rechnung.

3. Sei

$$f(x,y) := \frac{\sin(x^2\tan(y))}{1+x^2} \quad \text{und} \quad g(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Berechne $\partial_{xx} f$, $\partial_{yy} f$, $\partial_{xy} f$ und $\partial_{yx} f$.

(b) Berechne $\partial_{xx} g$, $\partial_{yy} g$, $\partial_{xy} g$ und $\partial_{yx} g$. Untersuche insbesondere den Punkt $(0,0)$.

(c) Begründe das Resultat aus b).

4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Ein kritischer Punkt x_0 von f heisst *nicht degeneriert*, falls $\det(f''(x_0)) \neq 0$ gilt. Zeige, dass alle nicht degenerierten kritischen Punkte isoliert sind. d. h. jeder nicht degenerierte kritische Punkt besitzt eine Umgebung, die keine weiteren kritischen Punkte enthält.

Tipp: *Wende das Inverse Funktionentheorem auf die Funktion* $\nabla f\colon U \to \mathbb{R}^n$ *an.*

5. Sei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ eine symmetrische, reelle $n\times n$ Matrix. A heisst positiv definit wenn für alle $v \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$ gilt: $v^T A v > 0$, und negativ definit wenn für alle $v \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$ gilt $v^T A v < 0$. (Dies ist äquivalent dazu, dass alle Eigenwerte von A positiv, bzw. negativ sind.) Definitheit kann man mit dem folgenden Kriterium überprüfen.

(Sylvesters Kriterium) Sei $A_k := (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ der obere $k\times k$ Block von A, und sei $d_k = \det(A_k)$ für $k = 1,\ldots,n$.
(1) Dann ist A positiv definit genau dann wenn $d_k > 0$ für $k = 1,\ldots,n$.
(2) A ist negativ definit genau dann wenn $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, $d_4 > 0$, etc. gilt.

(a) Benutze das Kriterium um die folgenden Matrizen auf positive bzw. negative Definitheit zu überprüfen.

i. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ii. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

iii. $\begin{pmatrix} -1 & x \\ x & -1 \end{pmatrix}$, in Abhängigkeit von x.

iv. $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, in Abhängigkeit von a, b, c.

(b) Zeige (2) in Sylvesters Kriterium unter Benutzung von (1).

(c) Zeige, dass eine positiv definite Matrix positive Determinante hat ohne Sylvesters Kriterium anzuwenden. (Hinweis: Wie ist die Determinante durch die Eigenwerte ausgedrückt?)

(d) Zeige, dass falls A positiv definit ist, A_k auch positiv definit ist und folgere damit und 5c) die Richtung "$\Rightarrow$" von (1).

(e) Beweise Sylvesters Kriterium (es fehlt noch Aussage (1), "$\Leftarrow$") durch Induktion über n. Gehe für den Induktionsschritt $n \to n+1$ wie folgt vor:

i. Wir schreiben die $(n+1)\times(n+1)$-Matrix A als $\begin{pmatrix} A_n & a \\ a^T & b \end{pmatrix}$. Wir setzen $v := -A_n^{-1}a$ und $P = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n\times n} & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zeige, dass dann gilt $P^TAP = \begin{pmatrix} A_n & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

ii. Zeige, dass $c > 0$. (Hinweis: $\det(A) = \det(P^TAP)$.)

iii. Folgere daraus, dass A positiv definit sein muss.

Schlussbemerkung: Sylvesters Kriterium wie oben ist verwendbar zur Bestimmung der Definitheit, nicht aber für die Semidefinitheit einer Matrix. Mit einer leichten Abwandlung (alle Hauptminoren haben Determinante ≥ 0) kann man auch die positive Semidefinitheit zeigen, dies soll jedoch hier ausser Acht gelassen werden.

Abgabe: in der Woche vom 9. April 2018, in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 28