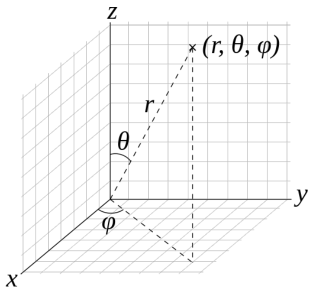
# Serie 7

1. (Kugelkoordinaten)




Betrachte die folgende Abbildung (Kugelkoordinaten auf dem $\mathbb{R}^3$)

$$\Phi : \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta).$$

Zeige, dass diese Abbildung ein lokaler Diffeomorphismus ist, und berechne die Ableitung (Jacobi-Matrix) der Umkehrabbildung.

2. (Babylonischer Algorithmus zur Bestimmung von $\sqrt{2}$.)
Zeige: Für jedes $x_0 \in [1, \infty)$ konvergiert die Folge $(x_n)$ mit

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

gegen $\sqrt{2}$.

Wende zum Beweis den Banachschen Fixpunktsatz an auf die Funktion $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

**Zusatzaufgabe:** Zeige, dass die obige Fixpunktiteration für alle Startwerte $x_0 > 0$ gegen $\sqrt{2}$ und für alle Startwerte $x_0 < 0$ gegen $-\sqrt{2}$ konvergiert.

**Bemerkung:** *Dies ist ein Spezialfall der Newton-Iteration*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

*zur Lösung der Gleichung $f(x) = 0$, in unserem Fall mit $f(x) = x^2 - 2$.*

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge welche den Ursprung enthält und

$$B : U \to \mathbb{R}^{n \times n}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit $B(0) = \mathbb{1}$. Zeige: Es existiert eine offene Teilmenge $0 \in V \subset U$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $A : V \to \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$A^2(x) = B(x), \qquad \text{für alle } x \in V.$$

Die Abbildung $A(x)$ heisst *Wurzel der Abbildung* $B(x)$.

**Hinweis:** *Wende das Inverse Funktionentheorem auf die Funktion $q : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $q(A) = A^2$, an der Stelle $A = \mathbb{1}$ an.*

4. Zeige, dass das Gleichungssystem

$$x^2 + uy + e^v = 0$$
$$2x + u^2 - uv = 5$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (2, 5) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung $(u(x, y), v(x, y))$ mit den folgenden Eigenschaften besitzt: Es gilt $u(2, 5) = -1$, $v(2, 5) = 0$ und die Abbildung $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ ist stetig differenzierbar. Berechne zusätzlich die Ableitung dieser Funktion im Punkt $(-1, 0)$.

**Hinweis:** *Wende das Implizite Funktionentheorem auf die Funktion*

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} x^2 + uy + e^v \\ 2x + u^2 - uv - 5 \end{pmatrix}$$

*an der Stelle* $(2, 5, -1, 0)$ *an.*

5. Entscheide, ob die folgenden Mengen $M$ Untermannigfaltigkeiten sind. Wenn ja, bestimme ausserdem deren Dimension und Tangentialräume.

   (a) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid ||x|| = 1,\ ||y - x|| = 1\}$
   **Hinweis:** *Wende den Satz vom regulären Wert auf die Funktion* $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) := (||x||^2, ||x - y||^2)$, *an. (Die Quadrate erleichtern die Rechnung und sind nicht unbedingt erforderlich)*

   (b) $M := \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) = 1\}$.
   **Hinweis:** *Die Ableitung* $d\det(A)B = tr(\mathrm{adj}(A)B)$ *wurde bereits in Serie 5, Aufgabe 4.(c), berechnet.*

   (c) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.
   **Hinweis:** *Was passiert mit der zusammenhängende Menge* $M \cap B_\epsilon(0)$, *wenn wir den Ursprung* $(0, 0)$ *entfernen? Ist so ein Verhalten für Untermannigfaltigkeiten möglich?*

   (d) $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 - x^4 = 0\}$.

**Hinweis:** Ist $M = f^{-1}(c)$ die Niveaumenge der Funktion $f$ zum regulären Wert $c$, so kann der Tangentialraum in $a \in M$ definiert werden als $T_aM = \ker f'(a) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid f'(a)v = 0\}$.

**Abgabe:** in der Woche vom 16. April 2018, in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 28