Serie 8

1. Seien $a, b, c > 0$ gegeben. Bestimme den achsenparallelen Quader grössten Volumens, der dem Ellipsoid
$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$
einbeschrieben ist.

Hinweis: *Interpretiere das Problem als ein Maximierungsproblem unter Nebenbedingungen: Falls $(x, y, z) \in E \cap \mathbb{R}^3_{\geq 0}$ die Ecke des Quaders im ersten Oktanten ist, dann ist das Volumen von Quaders durch $v(x, y, z) = 8xyz$ gegeben.*

2. (a) Bestimme die globalen Extrema der Funktion
$$f(x, y, z) := x^2 - y^2 + z$$
auf der Menge $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(b) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn man f stattdessen auf der Menge
$$\tilde{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } z \geq 0\}$$
betrachtet?

3. Bestimme die globalen Extrema der Funktion
$$f(x, y) = y^2$$
auf der Menge $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - xy + 2y^2 - 1 \leq 0\}$.

Hinweis: *Um diese Aufgabe mit Lagrange-Multiplikatoren zu lösen, ist zunächst zu klären, dass B eine beschränkte Teilmenge ist. Dies folgt bspw. mit der Abschätzung $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.*

4. Seien $a_1, \dots, a_n \geq 0$ und $p_1, \dots, p_n > 0$ reelle Zahlen mit $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Zeige die Ungleichung:
$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n$$

Hinweis: *Maximiere $f(a_1, \dots a_n) = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n}$ under der Nebenbedingung $g(a_1, \dots, a_n) = p_1 a_1 + \cdots p_n a_n - c = 0$. Die Lösung dieses Maximierungsproblems beantwortet wie gross die linke Seite höchstens werden, wenn wir den Wert auf der rechten Seite vorgeben. Hieraus lässt sich die Ungleichung direkt folgern.*

5. Betrachte die Abbildung
$$f : S^2 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6, \qquad f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy).$$

(a) Zeige, dass das Bild dieser Abbildung durch
$$M := \left\{ (u, v, w, a, b, c) \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; \begin{array}{llll} vw = a^2, & wu = b^2, & uv = c^2, & u + v + w = 1, \\ ab = cw, & bc = au, & ca = bv & \end{array} \right\}$$
gegeben ist.

(b) Benutze diese Darstellung um zu verifizieren, dass M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^6$ ist.

Hinweis: *Sei* $U := \{(u, v, w, a, b, c) \in \mathbb{R}^6 \,|u \neq 0\}$. *Zeige, dass*

$$M \cap U = \{(u, v, w, a, b, c) \in U \,|\, wu = b^2,\ uv = c^2,\ bc = au,\ u + v + w = 1\}$$

D.h. $M \cap U$ *wird bereits von vier Gleichungen beschrieben wird. Benutze diese vier Gleichungen und den Satz vom regulären Wert um zu zeigen, dass* $M \cap U$ *eine Untermannigfaltigkeit ist. Zeige analog für* $V := \{v \neq 0\}$ *und* $W := \{w \neq 0\}$, *dass* $M \cap V$ *und* $M \cap W$ *Untermannigfaltigkeiten sind. Schliesse hieraus, dass* M *eine Untermannigfaltigkeit ist.*

Abgabe: in der Woche vom 23. April 2018, in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 28