Serie 9

1. Berechne die Divergenz der folgenden Vektorfelder. Im zweidimensionalen Fall skizziere auch die Felder, im dreidimensionalen Fall berechne auch die Rotation.

   (a) $v(x,y) = (x,y)$
   (b) $v(x,y) = (y,-x)$
   (c) $v(x,y) = (x,-y)$
   (d) $v(x,y,z) = (z,x,y)$
   (e) $v(x,y,z) = (xyz, x^2z, x^2y)$
   (f) $v(x,y,z) = (x,y,z) \times \omega$ für $\omega \in \mathbb{R}^3$

2. Sei f ein Skalarfeld (eine Funktion) und seien $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$, jeweils hinreichend oft stetig differenzierbar.
   Der *Gradient* von f ist das Vektorfeld $\operatorname{grad} f := \nabla f$.
   Die *Rotation* von K ist das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} K := \nabla \times K = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_3}{\partial y} - \frac{\partial K_2}{\partial z} \\ \frac{\partial K_1}{\partial z} - \frac{\partial K_3}{\partial x} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

   Die *Divergenz* von K ist das Skalarfeld

$$\operatorname{div} K := \nabla \cdot K = \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y} + \frac{\partial K_3}{\partial z}.$$

   Beweise die folgenden Identitäten:

   (a) $\operatorname{div}(fK) = \nabla f \cdot K + f \operatorname{div} K$
   (b) $\operatorname{div}(K \times L) = L \cdot \operatorname{rot} K - K \cdot \operatorname{rot} L$
   (c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$
   (d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} K) = 0$
   (e) $\operatorname{div}(f \operatorname{rot} K) = \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{rot} K$
   (f) $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f$
   (g) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} K = \operatorname{grad} \operatorname{div} K - \operatorname{div} \operatorname{grad} K = \operatorname{grad} \operatorname{div} K - \Delta K$

   Hierbei bezeichnet $\cdot$ das Skalarprodukt. Bei der letzten Teilaufgabe ist der Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ komponentenweise auf das Vektorfeld K anzuwenden.

3. Ermittle mittels Picard-Lindelöf-Iteration die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Konstruiere ein im ganzen Raum definiertes Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das die Schraubenlinien

$$\gamma_{r,\theta} \;:\; t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ t-\theta \end{pmatrix}, \qquad r \geq 0,\; \theta \in \mathbb{R}$$

als Feldlinien besitzt.

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf Ω, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall so dass $0 \in I$ und bezeichne mit

$$\Phi : U := I \times \Omega \to \Omega$$

den durch das Vektorfeld v erzeugten Fluss auf $U := I \times \Omega$. Dieser ist (im Existenzfall) definiert durch die Bedingung, dass für jedes $x_0 \in \Omega$ die Kurve $x : I \to \Omega$, $x(t) := \Phi(t, x_0)$, die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = v(x(t)), \qquad x(0) = x_0$$

löst. Falls der Fluss Φ stetig differenzierbar ist, definiere für $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ die Kurve

$$\xi : I \to \mathbb{R}^n, \qquad \xi(t) := d\Phi_t(x_0)\xi_0$$

mit der Notation $\Phi_t(x) := \Phi(t,x)$. Zeige, dass ξ die Differentialgleichung

$$\dot{\xi}(t) = dv(x(t))\xi(t), \qquad \xi(0) = \xi_0$$

erfüllt.

Hinweis: *Wende den Satz von Schwarz über die Existenz und Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen auf $\xi(t) = \partial_{\xi_0}\Phi(t, x_0)$ an.*

Abgabe: in der Woche vom 30. April 2018, in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 28