Serie 11

1. Der Schwerpunkt eines messbaren Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$ mit positiven Volumen $\mathrm{vol}(K) > 0$ ist definiert als der Punkt $S := (s_x, s_y, s_z)$ mit den Koordinaten

$$s_x := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K x \, dxdydz \qquad s_y := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K y \, dxdydz, \qquad s_z := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K z \, dxdydz$$

   (a) Berechne den Schwerpunkt des Simplex

$$\Delta^3 := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \geq 0 \mid x + y + z \leq 1 \right\}.$$

   (b) Berechne den Schwerpunkt der oberen Halbkugel

$$H := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \, z \geq 0 \right\}.$$

2. Bestimme das Volumen

   (a) der Einheitskreisscheibe $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (b) des Rotationskörpers

$$R_f := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, \, x^2 + y^2 \leq f(z)^2 \right\}.$$

   welcher zu einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to [0, \infty)$ gehört.

   (c) des Torus

$$T_{r,R} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2 \right\}$$

   für $r < R$.

   (d) des Gebiets $G := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2 + x_4^2 \leq 1\}$ im $\mathbb{R}^4$.

3. (a) Berechne das Integral

$$\int_{[0,\pi]^3} \sin(x + y + z) \, dx \, dy \, dz.$$

   (b) Sei $A_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$. Berechne das Integral

$$\int_{A_1} x^2 \, dx \, dy.$$

   (c) Sei $A_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$. Berechne das Integral

$$\int_{A_2} xyz \, dx \, dy \, dz.$$

   (d) Sei $A_3 := \{(x, y) \mid |x| \leq |y| \leq 1\}$. Berechne das Integral

$$\int_{A_3} e^{y^2} \, dx \, dy.$$

(e) Berechne das Integral

$$\int_{[0,1]^2} \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 y^2}} \, dx \, dy.$$

(f) Definiere $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{für } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{für } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Berechne das Integral von f.
Bestimme das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$.

4. Kehre in den folgenden Beispielen die Integrationsreihenfolge um:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \int_{-x}^{2-x^2} f(x,y) \, dy \, dx.$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2} \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y) \, dx \, dy.$

(c) $\displaystyle\int_{-4}^{4} \int_{-\sqrt{4-|z|}}^{\sqrt{4-|z|}} \int_{-\sqrt{4-y^2-|z|}}^{\sqrt{4-y^2-|z|}} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz.$

5. (a) Sei Q ein abgeschlossener Quader. Zeige, dass $||\mathbb{1}_Q||_1 = v(Q)$, wobei $v(Q)$ das Volumen von Q ist und $|| \cdot ||_1$ die L^1-Halbnorm.

(b) Zeige, dass für eine Treppenfunktion ϕ gilt:

$$||\phi||_1 = \int |\phi(x)| dx$$

Abgabe: in der Woche vom 14. Mai 2018, in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 28