Serie 12

1. **Hinweis:** *Die folgende Aufgabe ist eine alte Prüfungsaufgabe.*
   Bestimme das Volumen des Körpers
   $$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1\right\} .$$

2. (a) Zeige, dass die Funktion $(x+y)^{-a}$ über den 2-dimensionalsen Standardsimplex Δ^2 genau für $a < 2$ intergrierbar ist. In diesem Fall gilt
   $$\int_{\Delta^2} \frac{1}{(x+y)^a}\, dxdy = \frac{1}{2-a}$$
   (b) Zeige, dass die Funktion $(x+y)^{-a}$ genau für $a > 2$ über den Aussenraum $\mathbb{R}^2_+ \backslash \Delta^2$ integriertbar ist. In diesem Fall gilt
   $$\int_{\mathbb{R}^2_+ \backslash \Delta^2} \frac{1}{(x+y)^a}\, dxdy = \frac{1}{a-2}$$
   Hinweis: *Verwende die Jacobi-Transformation* $(x,y) = J(u,v) := (u(1-v), uv)$.

3. Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ der Durchschnitt der beiden Zylinder
   $$Z_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ und } Z_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq 1\}.$$
   Berechne das Volumen von K.

4. Es bezeichne
   $$\Delta^n := \{x \in [0,1]^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1\}$$
   das n-dimensionale Standardsimplex.
   (a) Berechne das Volumen von Δ^n.
   (b) Berechne das Integral $\displaystyle\int_{\Delta^n} e^{x_1+x_2+\cdots+x_n}\, dx_1 \cdots dx_n$.
   Hinweis: *Betrachte die Substitution $y_k = x_1 + \cdots + x_k$ für $k = 1, \ldots, n$.*
   (c) Das Simplex im $\mathbb{R}^n$ mit den Eckpunkten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge
   $$D := \left\{ \sum_{k=1}^n t_k(a_k - a_0) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; (t_1, \ldots, t_n) \in \Delta^n \right\}.$$
   Zeige:
   $$\operatorname{vol}_n(D) = \frac{1}{n!} \left|\det(a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_n - a_0)\right| .$$

5. (a) Bestimme das zwischen der Kugel $x^2+y^2+z^2 = 8$ und dem Paraboloid $4z = x^2+y^2+4$ eingeschlossene Volumen.
   Hinweis: Verwende Zylinderkoordinaten.
   (b) Sei B der Bereich im ersten Quadranten des $\mathbb{R}^2$ begrenzt durch die Kurven
   $$xy = 1,\ xy = 3,\ x^2 - y^2 = 1,\ x^2 - y^2 = 4.$$
   Berechne $\int_B (x^2 + y^2)\, dx\, dy$.
   Hinweis: Substituiere $u = xy$ und $v = x^2 - y^2$.

Abgabe: in der Woche vom 21. Mai 2018, in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 28