Serie 13

Hinweis: *Nur die ersten vier Aufgaben sind relevant für den Bonus.*

1. Sei $r : [a, b] \to (0, \infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion.

   (a) Finde Formeln für das 1-dimensionale Volumen und den Schwerpunkt $S = (S_z, S_r)$ des Graphen
   $$\Gamma := \{(z, r(z)) \mid z \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

   (b) Zeige, dass der Flächeninhalt der Rotationsfläche
   $$R_\Gamma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b,\, x^2 + y^2 = r(z)^2\}$$
   durch die *zweite Guldinsche Regel* gegeben ist:
   $$\mathrm{vol}_2(M) = 2\pi S_r \cdot \mathrm{vol}_1(\Gamma).$$

2. Für $R > a > 0$ betrachten wir den Torus
   $$T_{R,a} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = a^2 \right\}.$$

   (a) Zeige, dass $T_{R,a}$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

   (b) Berechne die Fläche des Torus $v_2(T_{R,a})$.

3. Betrachte die Sphäre $S_r^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^3$. Belegt man diese gleichmässig mit einer Masse konstanter Dichte $\rho > 0$, so ist das resultierende Gravitationspotential im Punkt $p \in \mathbb{R}^3 \backslash S_r^2$ gegeben durch
   $$V(p) := \int_{S_r^2} \frac{\rho}{||x - p||}\, dS(x).$$
   Zeige, dass $V(p) = 4\pi r \rho$ für alle p im Inneren der Sphäre gilt. Insbesondere ist V im Inneren der Sphäre konstant und übt dort keine Gravitationskraft aus.

   Hinweis: *Aus Symmetriegründen kannst Du $p = (0, 0, a)$ mit $|a| < r$ annehmen. Dann gilt in Kugelkoordinaten $||x - p|| = \sqrt{r^2 - 2ra\cos(\theta) + a^2}$ und das Oberflächenintegral lässt sich in diesen Koordinaten explizit berechnen.*

4. Zu von 0 verschiedenen reellen Zahlen $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}^*$ definiere $S \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $x \mapsto (x_1/s_1, \ldots, x_n/s_n)$. Zeige:

   (a) Ist f über $\mathbb{R}^n$ integrierbar, dann auch $f \circ S$, und es gilt
   $$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x_1}{s_1}, \ldots, \frac{x_n}{s_n}\right) d^n x = |s_1 \cdot \ldots \cdot s_n| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d^n x\,.$$

   (b) Mit $A \subset \mathbb{R}^n$ ist auch $S^{-1}(A)$ messbar und hat das Volumen
   $$v(S^{-1}(A)) = |s_1 \cdot \ldots \cdot s_n| \cdot v(A)\,.$$
   Man berechne damit das Volumen eines Ellipsoids im $\mathbb{R}^3$.

5. Berechne den Fluss des Vektorfeldes

$$K\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ K(x,y,z) := (0,0,1-z)$$

von unten nach oben durch die obere Hälfte der Einheitssphäre

$$H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$$

(a) als Flussintegral $\int_H \langle K, \nu\rangle dS$,

(b) mit Hilfe des Satzes von Gauss. **Hinweis:** *Finde ein dreidimensionales Gebiet Ω, dessen Rand H enthält und so, dass der Fluss durch den restlichen Rand $\partial\Omega \setminus H$ einfach zu berechnen ist.*

6. **Hinweis:** *Die folgende Aufgabe stammt aus der Prüfung Analysis I–II für D–CHAB, D–MATH, D–PHYS, Herbst 2004.*

Es seien $a, b, c > 0$ feste Zahlen und

$$V := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq z \leq c \right\}.$$

(a) Skizziere V und berechne

$$\mathcal{I} := \int_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz\,.$$

(b) Berechne den Fluss

$$\Phi := \int_{\partial V} \langle K, \nu\rangle\, d\omega \quad \text{für} \quad K(x,y,z) := (-x^2yz,\, xy^2z,\, z^2)\,.$$

Dabei ist ∂V so orientiert, dass ν von innen nach aussen bezüglich V weist.

7. Sei $M := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0\}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ -x_1x_3 \\ x_2x_3^2 \end{pmatrix}$$

und $G := \{(x_1,x_2,x_3) \in M \mid x_3 \leq 2\} \subset M$.

(a) Sei $\nu : G \to S^2$ das in x_3-Richtung zeigende Einheitsnormalenfeld. Berechne das Flussintegral

$$\int_G \langle \mathrm{rot}(f), \nu\rangle\, dS$$

(b) Sei $\tau : \partial G \to S^2$ das Einheitsnormalenfeld entlang ∂G wie im Satz von Stokes. Berechne das Wegintegral

$$\int_{\partial G} \langle f, \tau\rangle\, dS.$$

8. Sei $M := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3\}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Bezeichne mit $\nu : M \to S^2$ das in x_3-Richtung zeigende Einheitsnormalenfeld von M. Berechne das Integral

$$\int_G \langle f, \nu\rangle\ dS$$

mit $G := \{(x_1,x_2,x_3) \in M \mid |x_3| \leq 1\}$ auf zwei Arten:

(a) direkt mit der Definition.

(b) mit Hilfe des Satzes von Stokes, indem Sie ein Vektorfeld g mit $\mathrm{rot}(g) = f$ finden und dieses entlang ∂G integrieren.

Abgabe: in der Woche vom 28. Mai 2018, in der Übungsstunde oder in den Fächern im HG F 28