1. **Single Choice:** $16J_0$

   Offene Aufgabe:

   (a) Der Flächeninhalt einer Kreisscheibe mit Radius R ist gegeben durch πR^2. Aus Symmetriegründen ist der Flächeninhalt eines Kreisssektors mit 60° gegeben durch $\frac{\pi R^2}{6}$. Folglich ist der Flächeninhalt von F gleich

   $$\frac{2\pi}{6}\left(1^2+2^2+3^2\right)=\frac{28\pi}{6}.$$

   (b) Der Umfang einer Kreisscheibe mit Radius R ist gleich $2\pi R$. Folglich ist die Länge des Kreissbogens eines Kreissektors mit Radius R und Innenwinkel 60° gleich $\frac{2\pi}{6}R$. Der Umfang von F ist somit gegeben durch

   $$2\frac{2\pi}{6}(1+2+3)+4\cdot 1+2\cdot 2=4\pi+8.$$

   (c) Es sei $K(R,\phi_0)$ ein Kreissektor mit Radius R und Innenwinkel ϕ. Somit gilt für das polare Flächenträgheitsmoment von $K(R,\phi_0)$

   $$J_0(K(R,\phi_0))=\int_{K(R,\phi_0)} r^2 r\,dr d\phi=\int_0^{\phi_0}\int_0^R r^3\,dr d\phi=\phi_0\frac{1}{4}R^4.$$

   Wir berechnen

   $$J_0(F)=\int_F r^2 r\,dr d\phi=2\left(J_0(K(1,\frac{\pi}{3}))+J_0(K(2,\frac{\pi}{3}))+J_0(K(3,\frac{\pi}{3}))\right)$$
   $$=\frac{\pi}{6}\left(1^4+2^4+3^4\right)=\frac{98\pi}{6}.$$

2. **Single Choice:** Abbildung 2 zeigt nicht eine Kurve und die zugehörige Evolute.

Offene Aufgabe:

(a) **Bemerkung:** In der Aufgabe wurde der Durchlaufsinn der Kurve nicht angegeben, somit ist die Krümmung der Kurve nur bis auf das Vorzeichen eindeutig festgelegt!

Alternative 1: (Implizit) Es sei $F(x,y) := x^4 - y^2 - 1$. Wir berechnen

$$F_x = 4x^3,\ F_y = -2y,\ F_{xx} = 12x^2,\ F_{xy} = F_{yx} = 0,\ F_{yy} = -2.$$

Es gilt

$$\kappa = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_x^2F_{yy}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}} = \frac{-4y^2 \cdot 12x^2 + 16x^6 \cdot 2}{(16x^6 + 4y^2)^{3/2}}$$

und deshalb

$$\kappa(1,0) = \frac{32}{16^{3/2}} = \frac{1}{2}.$$

Alternative 2: (Als Funktionsgraph) Weil

$$x^4 - y^2 = 1,$$

folgt $x = \pm\sqrt[4]{y^2+1}$. Wir sind interessiert an der Krümmung im Punkt $(1,0)$, also genügt es den positiven Ast $x = \sqrt[4]{y^2+1}$ zu betrachten. Es sei $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Kurve gegeben durch

$$t \mapsto \left(\sqrt[4]{t^2+1}, t\right).$$

Beachte $\gamma(0) = (1,0)$. Wir berechnen

$$\dot{\gamma_1}(t) = \frac{t}{2}\frac{1}{(t^2+1)^{3/4}}, \quad \ddot{\gamma_1}(t) = \frac{2-t^2}{4(1+t^2)^{7/4}},$$
$$\dot{\gamma_2}(t) = 1, \quad \ddot{\gamma_2}(t) = 0.$$

Für die Krümmung gilt

$$\kappa(t) = \frac{\ddot{\gamma_2}\dot{\gamma_1} - \dot{\gamma_2}\ddot{\gamma_1}}{(\dot{\gamma_1}^2 + \dot{\gamma_2}^2)^{3/2}}$$

und deshalb

$$\kappa(1,0) = \frac{0 - 1\cdot\frac{2}{4}}{1} = -\frac{1}{2}.$$

(b) Es sei $\gamma(t) = (t, y(t))$. Es gilt

$$y' = \tan(t)$$

und deshalb

$$\|\gamma'\| = \sqrt{1+\tan(t)^2}.$$

Die Kurve hat also die Länge

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\tan(t)^2}\,dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathsf{arsinh}(\sqrt{3}).$$

Im ersten Schritt haben wir die Substitution $x = \tan(t)$ durchgeführt.

(c) Wir setzen

$$f(c, x) = cx + c^2 + 3.$$

Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial c} = x + 2c,$$

und somit ist unser Kandidat für die Einhüllende

$$h(x) = f(-\frac{1}{2}x, x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3.$$

Wir müssen noch überprüfen, dass es sich tatächlich um eine Einhüllende handelt. Falls $h(x) = f(c, x)$, dann gilt

$$-\frac{1}{4}x^2 + 3 = cx + c^2 + 3$$

was die eindeutige Lösung

$$x_c = -2c$$

hat und somit berührt h jede Kurve $f(c, \cdot)$ genau an einem Punkt, da die Funktion $-2c$ bijektiv in c ist.

3. **Single Choice:** Asymptotisch stabil.

Offene Aufgabe:

(a) Das charakteristische Polynom des homogenen Differentialgleichungssystems ist gegeben durch

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2).$$

Es sei v_i der Eigenvektor zum Eigenwert λ_i, wobei $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$. Wir berechnen $v_1 = (1, 2)$ und $v_2 = (1, 1)$, also gilt für die allgemeine Lösung

$$y_{alg} = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2, \text{ wobei } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Durch Einsetzen berechnet man $C_1 = 1$ und $C_2 = 2$.

(c) Wir berechnen

$$\dot{x}(t) = e^t - e^{-t}, \quad \dot{y}(t) = 4e^t + 3e^{-t}.$$

Für die gesuchte Tangente $\vec{g}$ gilt also

$$\begin{aligned}
\vec{g}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{x}(2) \\ \dot{y}(2) \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} x(2) \\ y(2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^2 - e^{-2} \\ 4e^2 + 3e^{-2} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} e^2 + e^{-2} \\ 4e^2 - 3e^{-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\sinh(2) \\ e^2 + 6\cosh(2) \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2\cosh(2) \\ e^2 + 6\sinh(2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4. **Single Choice:** > 0.

Offene Aufgabe:

(a) Falls $x^2 - 1 \neq 0$, gilt

$$
\begin{aligned}
1 &= x^2 - 4y^2 - z^2 \iff \\
1 &= \frac{4}{x^2-1}y^2 + \frac{1}{x^2-1}z^2 =: \frac{y^2}{a(x)^2} + \frac{z^2}{b(x)^2}.
\end{aligned}
$$

Für festes $x \geq 1$ und unter der Annahme $a(x), b(x) \geq 0$ bilden die y, z Werte also eine Ellipse $E(x)$ mit Halbachsen

$$a(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2} \text{ und } b(x) = \sqrt{x^2-1}.$$

Die Ellipse $E(x)$ hat den Flächeninhalt

$$F(E(x)) := \pi a(x) b(x) = \frac{\pi}{2}\left(x^2 - 1\right).$$

Wir können somit berechnen

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{vol}(S) \\
&= \int_1^{\cosh(1)} F(E(x))dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^{\cosh(1)} \\
&= \frac{\pi}{2}\cosh(1)\left(\frac{1}{3}\cosh(1)^2 - 1\right) + \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Alternative 1: Wir benutzen die Koordinatentransformation

$$\Phi(r, \phi, x) = \left(x, \frac{1}{2}r\cos(\phi), r\sin(\phi)\right) := (x, y, z).$$

Es sei J die Jacobi Matrix dieser Transformation, wir berechnen

$$\det(J) = \frac{r}{2}.$$

Wir haben

$$S = \left\{(x, y, z) : 4y^2 + z^2 = x^2 - 1, x \in [1, \cosh(1)]\right\},$$

und mit den neuen Koordinaten gilt somit

$$S = \left\{(r, \phi, x) : r^2 \leq x^2 - 1,\ x \in [1, \cosh(1)],\ \phi \in [0, 2\pi]\right\}$$

und somit

$$\mathsf{vol}(S) = \int_1^{\cosh(1)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{x^2-1}} \frac{r}{2}\, dr d\phi dx = \frac{\pi}{2}\cosh(1)\left(\frac{1}{3}\cosh(1)^2 - 1\right) + \frac{\pi}{3}.$$

Alternative 2: Alternativ kann man auch eines der Integrale

(i)
$$\int_1^{\cosh(1)} \int_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1-z^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1-z^2}} 1 \; dy\,dz\,dx,$$

(ii)
$$\int_1^{\cosh(1)} \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}}^{\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}} \int_{-\sqrt{x^2-1-4y^2}}^{\sqrt{x^2-1-4y^2}} 1 \; dz\,dy\,dx,$$

(iii)
$$\int_{-\sinh(1)}^{\sinh(1)} \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{\sinh(1)^2-z^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{\sinh(1)^2-z^2}} \int_1^{\sqrt{1+z^2+4y^2}} 1 \; dx\,dy\,dz,$$

(iv)
$$\int_{-\frac{1}{2}\sinh(1)}^{\frac{1}{2}\sinh(1)} \int_{-\sqrt{\sinh(1)^2-4y^2}}^{\sqrt{\sinh(1)^2-4y^2}} \int_1^{\sqrt{1+z^2+4y^2}} 1 \; dx\,dz\,dy.$$

direkt ausrechnen.

(b) Es gilt

$$\mathsf{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

(c) Wir dürfen den Satz von Gauss anwenden und erhalten somit

$$\Phi = \iiint_S \mathsf{div}(\vec{v})\, dV = \mathsf{vol}(S).$$

5. **Single Choice:** Im Innern des Einheitsquadrates.

   Offene Aufgabe:

   (a) Wir berechnen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x(3x-4)f \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (-4y+2)f$$

   und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \left(3x^2-4x\right)^2 f + (6x-4)f$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(3x^2-4x\right)(2-4y)f$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = (2-4y)^2 f - 4f.$$

   Also ist die Determinante der Hessematrix gegeben durch

$$\mathsf{det}(H(x,y)) = f \cdot \left(-36x^4 + 96x^3 - 64x^2 + 96x(y-1)y - 64(y-1)y\right).$$

   Setzt man $(\frac{4}{3}, \frac{1}{2})$ ein, erhält man

$$f\big(\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\big) \cdot (-16) < 0,$$

   deshalb ist $(\frac{4}{3}, \frac{1}{2})$ ein Sattelpunkt.

   (b) Es gilt $f(x,y) > 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und somit sind $(0, \frac{1}{2})$ und $(\frac{4}{3}, \frac{1}{2})$ die einzigen kritische Punkt der Funktion f. Der Punkt $(\frac{4}{3}, \frac{1}{2})$ ist nicht in der Kreisscheibe D und deshalb ist $(0, \frac{1}{2})$ der einzige Kandidat für ein lokales Maximum im Gebiet D. Es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\big(0, \frac{1}{2}\big) = -4f\big(0, \frac{1}{2}\big) < 0$$
$$\mathsf{det}(H(0, \frac{1}{2})) = 16f\big(0, \frac{1}{2}\big) > 0,$$

   und deshalb ist der Punkt $(0, \frac{1}{2})$ das einzige lokales Maxima im Gebiet D. Der Wert von f and der Stelle $(0, \frac{1}{2})$ ist $\sqrt{e}$.

   (c) Am Rand gilt $x^2 + y^2 = 1$. Wie benutzen die Polarkoordinaten $x = \cos(\phi), y = \sin(\phi), \phi \in [0, 2\pi]$ und erhalten

$$f(x,y) = e^{x^3-2+2y} = e^{\cos(\phi)^3-2+2\sin(\phi)}.$$

   Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = -3\cos(\phi)^2\sin(\phi) + 2\cos(\phi) \stackrel{!}{=} 0.$$

   Man sieht sofort, dass $\frac{\partial f}{\partial \phi}(\phi) = 0$, falls $\cos(\phi) = 0$ (also genau dann wenn $\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$). Nehme an $\cos(\phi) \neq 0$ und $\frac{\partial f}{\partial \phi}(\phi) = 0$, wir berechnen

$$3\cos(\phi)^2\sin(\phi) = 2\cos(\phi) \overset{\cos(\phi)\neq 0}{\iff} \frac{3}{2}2\cos(\phi)\sin(\phi) = 2 \iff \sin(2\phi) = \frac{4}{3} > 1,$$

und somit kann $\frac{\partial f}{\partial \phi}(\phi) = 0$ nicht gelten falls $\phi \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Durch betrachten der zweiten Ableitung, sieht man, dass das Maximum am Punkt

$$x = 0, y = 1$$

angenommen wird. Der Wert der Funktion an diesem Punkt ist 1.

6. **Single Choice:** 2.

   Offene Aufgabe:

   (a) Das Indexpolynom ist gegeben durch

   $$\alpha(\alpha - 1) - \alpha + 2.$$

   Somit sind die Nullstellen $\alpha_1 = 1 - i$ und $\alpha_2 = 1 + i$.

   (b) Gemäss Stammbach gilt, dass die allgemeine Lösung gegeben ist durch $C_1 + C_2 \log(x) + C_3 x^2 + C_4 x \cos(2\log(x)) + C_5 x \sin(2\log(x))$.

   (c) Eine partikuläre Lösung ist z.B.

   $$\frac{1 + \log(x)}{2}.$$

7. **Single Choice:** Kann quellenfrei sei.

   Offene Aufgabe:

   (a) Die Figur ist rotationssymmetrisch bezüglich der z-Achse. Der Flächeninhalt ist also durch $2\pi(4 + 2\sqrt{2})$ gegeben.
   Alternative via Formeln: Die Oberflaäche des Kegels ist $\pi \times$ Radius $\times$ Mantellinie und somit $4\sqrt{2}\pi$. Die Oberfläche des Zylindermantels ist $2\pi \times$ Radius Höhe und deshalb durch 8π gegeben. Der gesamte Flächeninhalt ist also gleich
   $(8 + 4\sqrt{2})\pi$.

   (b) Wir berechnen

   $$\mathsf{rot}(\vec{c}) = \left(\frac{y}{z-4}, \frac{x}{4-z}, 1 \right).$$

   (c) *Direkt:* Wir berechnen

   $$\dot{\gamma_1}(t) = (1, 0, -1) \quad \dot{\gamma_2}(t) = 2(\sin(-t), -\cos(-t), 0)$$

   und somit ist die gesuchte Arbeit gleich

   $$\begin{aligned} &\int_{\gamma_1} \vec{c} \cdot \dot{\gamma}_1 + \int_{\gamma_2} \vec{c} \cdot \dot{\gamma}_2 \\ &= \int_0^2 -t \log(t)\, dt + \int_0^\pi -4\cos(-t)^2\, dt = -2\log(2) + 1 - 2\pi. \end{aligned}$$

   Beide Integrale wurden mit der Methode der partiellen Substitution ausgerechnet, wobei beim zweiten Integral die partielle Substitution zweimal ausgeführt werden muss.
   Via Stokes: Es bezeichne A die Fläche gegeben durch

   $$F(r, \phi) = (r\cos(-\phi), r\sin(-\phi), 4 - r), \quad \phi \in [0, \pi], r \in [0, 2].$$

Das Vektorfeld

$$\vec{n} = \partial_r F \times \partial_\phi F = -(r^2 \cos(-\phi), r^2 \sin(-\phi), r), \quad \phi \in [0,\pi], r \in [0,2],$$

ist ein (nicht normiertes) Normalenvektorfeld von S. Wir berechnen

$$\int_S \vec{c} \cdot \vec{n} dS = \int_0^\pi \int_0^2 r\, dr d\phi = -2\pi.$$

Wir definieren den Weg $\gamma_3\colon [0,2] \to \mathbb{R}^3$ via $t \mapsto (-t, 0, 4-t)$. Der Satz von Stokes sagt uns, dass

$$-2\pi = \int_{\gamma_1} \vec{c} \cdot \dot{\gamma}_1 + \int_{\gamma_2} \vec{c} \cdot \dot{\gamma}_2 - \int_{\gamma_3} \vec{c} \cdot \dot{\gamma}_3.$$

und somit

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma_1} \vec{c} \cdot \dot{\gamma}_1 + \int_{\gamma_2} \vec{c} \cdot \dot{\gamma}_2 \\ &= -2\pi + \int_{\gamma_3} \vec{c} \cdot \dot{\gamma}_3 \\ &= -2\pi + \int_0^2 -t \log(t)\, dt = -2\pi + 1 - 2\log(2). \end{aligned}$$

Das Integral wurde mit der Methode der partiellen Substitution ausgerechnet.

Lösungsbuchstaben SC-MC-Teil Gruppe A Basisprüfung Winter 2018

A1	a
A2	b
A3	c
A4	b
A5	c
A6	c
A7	a
A8	a
A9	a
A10	b
A11	c
A12	a
A13	a
A14	c
A15	b
A16	b
A17	b
A18	a
A19a	w
A19b	w
A19c	f
A20a	w
A20b	w
A20c	f
A21a	f
A21b	f
A21c	f
A22a	f
A22b	w
A22c	w
A23a	w
A23b	w
A23c	f
A24a	w
A24b	f
A24c	f
A25a	f
A25b	w
A25c	w
A26a	f
A26b	w
A26c	w
A27a	f
A27b	f
A27c	w