Lösung - Schnellübung 11

1. Bestimmen Sie das Potential f des Coulombfelds

$$\vec{v}(\vec{r}\,) = -C\frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|^3}$$

auf dem Gebiet $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Lösung: Wie wir früher gesehen haben, ist $\operatorname{rot}\vec{v} = (0,0,0)$. Da das Gebiet $D = \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ einfach zusammenhängend ist, existiert also ein Potential f von $\vec{v}$. Für dieses Potential muss insbesondere gelten

$$f_x(x,y,z) = -\frac{Cx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Wenn wir nun die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

betrachten, liegt die Lösung nahe:

$$f(x,y,z) = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ist ein Potential von $\vec{v}$ (anders geschrieben $f(\vec{r}) = \dfrac{C}{|\vec{r}|}$).

2. Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = (4xy,\, 2x^2+2yz^2-\frac{2}{3}y^3,\, 2y^2z-\frac{2}{3}z^3)$.
Es sei K die Kugel mit Radius 1 und Zentrum $(0,0,0)$. Es sei B der im ersten Oktanten $(x\geq 0, y\geq 0,\, z\geq 0)$ liegende Teilkörper von K.

a) Berechnen Sie

$$\iiint_B \operatorname{div}\vec{v}\,dV.$$

b) Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v}$ durch den gekrümmten Teil der Oberfläche von B von innen nach aussen.

Lösung:

a) Für die Berechnung eignen sich am besten Kugelkoordinaten (ϱ,ϕ,θ). Dann erhält man mit $x = \varrho\sin\theta\cos\phi,\ y = \varrho\sin\theta\sin\phi,\ z = \varrho\cos\theta,\ dV = \varrho^2\sin\theta\,d\varrho\,d\phi\,d\theta$ und $\operatorname{div}\mathbf{v} = 4y$

$$\begin{aligned}\iiint_B \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 4\varrho^3\sin^2\theta\sin\phi\,d\varrho\,d\phi\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\sin\phi\,d\phi\,d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,[-\cos\phi]_0^{\pi/2}\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Bitte wenden!

b) Sei M der gekrümmte Teil der Oberfläche von B, und seien S_1, S_2 und S_3 die geraden Seitenflächen von B. Nach dem Satz von Gauss hat man

$$\iint_M \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dO = \iiint_B \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV - \iint_{S_1} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dO - \iint_{S_2} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dO - \iint_{S_3} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dO.$$

Auf S_1 und S_2 gilt $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0$, und auf auf S_3 ergibt sich

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x^2 \\ -\frac{2}{3}z^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2x^2.$$

Somit erhält man für

$$\begin{aligned}
\iint_M \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dO &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (-2x^2)\,dz\,dx = \frac{\pi}{4} + 2\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,dz\,dx \\
&= \frac{\pi}{4} + 2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \cos^2 u\,du \quad (\text{mit} x = \sin u) \\
&= \frac{\pi}{4} + 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\,du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u\,du\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + 2\left(\frac{\pi}{4} - \left[-\frac{1}{4}\sin^3 u \cos u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\,du\right) = \frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$

3. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x,y,z) \longmapsto \left(2xy+3, x^2-4z, -4y\right).$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ konservativ ist.

b) Finden Sie eine Funktion f, so dass $\vec{v} = \mathbf{grad} f$.

c) Berechnen Sie

$$\int_C \vec{v}\cdot d\vec{r},$$

wobei C ein beliebiger Weg ist, der die Punkte $(3,-1,2)$ und $(2,1,-1)$ verbindet.

Lösung:

a) Es ist $D(\vec{v}) = \mathbb{R}^3$, also einfach zusammenhängend und

$$\mathbf{rot}\vec{v}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} -4-(-4) \\ 0-0 \\ 2x-2x \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Nach Stammbach–Skript, Teil B, Kaitel VI, Satz 4 (Seite 71) ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld. Nach Satz 2 (Seite 69) ist $\vec{v}$ konservativ.

b) Nach Teilaufgabe a) existiert f, so dass

$$\vec{v}\,(x,y,z) = \mathbf{grad} f\,(x,y,z) \iff \begin{array}{ll} \text{(i)} & f_x(x,y,z) = 2xy+3 \\ \text{(ii)} & f_y(x,y,z) = x^2-4z \\ \text{(iii)} & f_z(x,y,z) = -4y. \end{array}$$

Siehe nächstes Blatt!

Aus (i) folgt, dass $f(x, y, z) = x^2 y + 3x + C(y, z)$, wobei C eine Funktion von y und z ist. Damit ist aus (ii) $x^2 - 4z = f_y(x, y, z) = x^2 + C_y(y, z)$ oder $C_y(y, z) = -4z$, also $C(y, z) = -4yz + D(z)$, wobei D eine Funktion von z ist. Somit schreibt sich f als $f(x, y, z) = x^2 y + 3x - 4yz + D(z)$. Aus (iii) folgt dann $-4y = f_z(x, y, z) = -4y + D_z(z)$ oder $D_z(z) = 0$, also $D(z) = K$ mit K eine Konstante in $\mathbb{R}$. Zusammenfassend erhalten wir

$$f(x, y, z) = x^2 y + 3x - 4yz + K.$$

c) Da $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist (wegen Teilaufgabe a) oder b)), gilt dass (Stammbach–Skript, Teil B, Kapitel VI, Seite 68)

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = f(2, 1, -1) - f(3, -1, 2) \overset{\text{b)}}{=} 6.$$

4. Es sei S eine Fläche in der Ebene mit Rand ∂S.

a) (Satz von Green) Zeigen Sie, dass für stetig differenzierbare Funktionen $P\colon (x, y) \mapsto P(x, y)$ und $Q\colon (x, y) \mapsto Q(x, y)$ gilt:

$$\int_{\partial S} (P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y) = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Hinweis: Benützen Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld $\vec{v}\colon (x, y, z) \mapsto (P, Q, 0)$.

b) Mit $P(x, y) = -y$ und $Q(x, y) = 0$ folgt aus Teil (a), dass der Flächeninhalt $A(S)$ von S gleich

$$A(S) = -\int_{\partial S} y \, \mathrm{d}x$$

ist. Finden Sie ähnliche Formel für die Komponenten des Schwerpunkts

$$\frac{1}{A(S)} \iint_S x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \quad \text{und} \quad \frac{1}{A(S)} \iint_S y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

bzw. für das polare Trägheitsmoment

$$\iint_S (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

als Integrale entlang ∂S. Verwenden Sie hierzu den Satz von Green für passende Funktionen P, Q.

Lösung:

a) Wir definieren nach dem Hinweis das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \mapsto \vec{v}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0).$$

Es gilt:

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die Fläche S als Fläche in $\mathbb{R}^3$ auf der xy-Ebene mit Rand ∂S und (ohne Beschränkungen der Allgemeinheit) Normalenvektor $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Die Arbeit von $\vec{v}$ längs ∂S im positiven Durchlaufsinn beträgt

$$\int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial S} P \, dx + Q \, dy,$$

die nach dem Satz von Stokes gleich

$$\int\int_S \operatorname{rot}\vec{v}\cdot\vec{n}d\mathcal{O} = \int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

ist.

b) Mit der Wahl $P(x,y) = 0$ und $Q(x,y) = \frac{x^2}{2}$ erhalten wir

$$\int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\int_S x\, dxdy \overset{a)}{=} \int_{\partial S} \frac{x^2}{2} dy.$$

Die x-Komponente des Schwerpunkts ist also gleich

$$\frac{1}{A(S)} \iint_S x\, dxdy = \frac{1}{2A(S)} \int_{\partial S} x^2 dy.$$

Analog, mit der Wahl $P(x,y) = -\frac{y^2}{2}$ und $Q(x,y) = 0$ erhalten wir

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_S y\, dxdy \overset{a)}{=} -\int_{\partial S} \frac{y^2}{2} dx.$$

Die y-Komponente des Schwerpunkts ist also gleich

$$\frac{1}{A(S)} \iint_S y\, dxdy = -\frac{1}{2A(S)} \int_{\partial S} y^2 dx.$$

Endlich, mit der Wahl $P(x,y) = -\frac{y^3}{3}$ und $Q(x,y) = \frac{x^3}{3}$ erhalten wir das polare Trägheitsmoment

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_S (x^2 + y^2)\, dxdy \overset{a)}{=} \int_{\partial S} \frac{x^3}{3} dy - \frac{y^3}{3} dx.$$