

1. Die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}x(u, v) &= 2v, \\y(u, v) &= -2u\end{aligned}$$

bildet Kreise auf Kreise ab.

- ✓ (a) Wahr.
(b) Falsch.

Die Transformation entspricht einer Stauchung um den Faktor 2 gefolgt von einer Drehung um 90 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn. Folglich bleiben Kreise erhalten.

2. Betrachten Sie das Integral

$$I = \int_0^1 \int_0^x x \, dy \, dx.$$

Welche der folgenden Integrale sind gleich I ?

✓ (a) $\int_0^1 \int_0^y y \, dx \, dy$

(b) $\int_0^1 \int_0^y x \, dx \, dy$

✓ (c) $\int_0^1 \int_y^1 x \, dx \, dy$

Das Integral (a) entsteht aus I durch Vertauschung der Variablen x und y . In (c) ist der Integrationsbereich durch dieselbe Bedingung wie bei I , nämlich $0 \leq y \leq x \leq 1$, gegeben. Da auch der Integrand gleich ist, stimmen diese beiden Integrale überein.

Um zu sehen, dass (b) nicht richtig ist, gibt es mehrere Möglichkeiten. *Möglichkeit 1:* Es wird über die Region $0 \leq x \leq y \leq 1$ integriert, der Integrand ist derselbe. Intuitiv stimmt (b) daher nicht. Eine Rechnung bestätigt dies:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^y x \, dx \, dy &= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^y dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2} dy = \left[\frac{y^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}, \\ \int_0^1 \int_0^y y \, dx \, dy &= \int_0^1 [yx]_0^y dy = \int_0^1 y^2 dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Möglichkeit 2: Vertauschen wir die Variablen x und y , so hat das Integral die Form

$$\int_0^1 \int_0^x y \, dy \, dx.$$

Es wird also beide Male über die Region $0 \leq y \leq x \leq 1$ integriert, einmal allerdings ist der Integrand gleich x , das andere Mal gleich y . Nun ist aber fast immer $y < x$, es muss also das Integral in (b) kleiner sein als I .

Siehe nächstes Blatt!

3. Es sei B ein Bereich in der (x, y) -Ebene und \tilde{B} der via Polarkoordinaten entsprechende Bereich in der (ϱ, φ) -Ebene. Welchem Integral entspricht $\int_B xy \, dx \, dy$?

(a) $\int_{\tilde{B}} \varrho^2 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varrho \, d\varphi$

✓ (b) $\int_{\tilde{B}} \varrho^3 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varrho \, d\varphi$

(c) $\int_{\tilde{B}} \varrho^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varrho \, d\varphi$

Die allgemeine Formel lautet

$$\int_B f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\tilde{B}} f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) \varrho \, d\varrho \, d\varphi.$$

Also ist (b) richtig.

4. Es sei

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dF,$$

wobei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ bezeichne. Je nach Wahl des Koordinatensystems und der Reihenfolge der Integration lässt sich I auf verschiedene Arten als zweifaches Integral ausdrücken. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

✓ (a) $I = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx$

✓ (b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} \rho^2 \, d\rho \, d\varphi$

(c) $I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$

Beim dritten Integral wird über das Quadrat mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 1)$ integriert.

5. Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x(u, v) &= 2u + v, \\ y(u, v) &= u - 3v. \end{aligned}$$

a) Es bezeichne \mathcal{R} das Einheitsquadrat in der xy -Ebene, also $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$. Skizzieren Sie den Bereich $\tilde{\mathcal{R}}$ der uv -Ebene, der unter dieser Transformation entsteht.

b) Berechnen Sie die Einträge und die Determinante der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

c) Vergleichen Sie das Resultat aus (b) mit dem Verhältnis der Flächen von \mathcal{R} und $\tilde{\mathcal{R}}$.

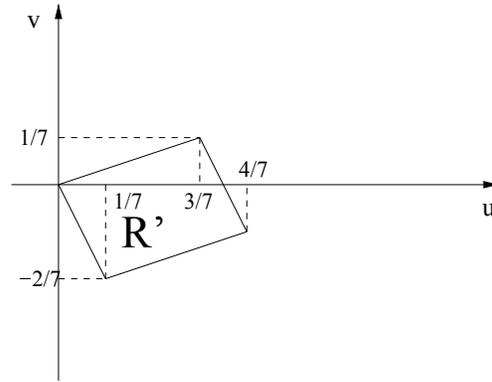
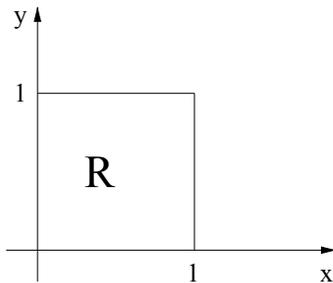
Lösung:

a) Durch Umformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{3}{7}x + \frac{1}{7}y, \\ v(x, y) &= \frac{1}{7}x - \frac{2}{7}y. \end{aligned}$$

Die vier Eckpunkte $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ des Einheitsquadrats in der xy -Ebene werden nun zu den vier Punkten $(0, 0)$, $(1/7, -2/7)$, $(3/7, 1/7)$ und $(4/7, -1/7)$ in der uv -Ebene. Da unter einer linearen Transformation Geraden erhalten werden, muss der Bereich $\tilde{\mathcal{R}}$ also folgende Form haben:

Siehe nächstes Blatt!



b) Es gilt

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist die Determinante gleich -7 .

c) Die Fläche in der uv -Ebene ist 7-mal kleiner, also genau um den Faktor der Determinante der Matrix J .

6. Betrachten Sie den Laplace-Operator

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

für zweimal differenzierbare Funktionen $f: (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ in drei Variablen.

a) Berechnen Sie Δf für $f(x, y, z) = x^2y + 2xz^{-1} + \sin(xz)$.

b) Welche Form hat dieser Laplace-Operator in zylindrischen Koordinaten, das heisst, nach der Koordinatentransformation

$$x(\varrho, \varphi, z) = \varrho \cos(\varphi), \quad y(\varrho, \varphi, z) = \varrho \sin(\varphi), \quad z(\varrho, \varphi, z) = z,$$

wobei $\varrho > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $z \in \mathbb{R}$ sind? Beschränken Sie sich hierzu auf $x > 0$ und $y > 0$, da ansonsten unnötige Komplikationen bei der Berechnung des Arkustangens auftreten. Anleitung: Hierzu definieren Sie zunächst die Funktion $\tilde{f}: (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\tilde{f}(\varrho, \phi, z) = f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z).$$

(Diese Funktion erlaubt uns, nun direkt die Variablen ϱ , φ und z einzusetzen.) Dann berechnen Sie die Umkehrungen $\varrho(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ und verwenden schliesslich die verallgemeinerte Kettenregel.

c) Berechnen Sie, unter Zuhilfenahme von Teil (b), Δf für

$$f(x, y, z) = \frac{1}{z} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - 2z\sqrt{x^2 + y^2}$$

und $x, y, z > 0$.

Lösung:

Bitte wenden!

a) Es gilt $f_x = 2xy + 2z^{-1} + z \cos(xz)$, $f_y = x^2$ und $f_z = -2xz^{-2} + x \cos(xz)$. Also gilt

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2y - z^2 \sin(xz), \\ f_{yy} &= 0, \\ f_{zz} &= 4xz^{-3} - x^2 \sin(xz). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\Delta f = 2y + 4xz^{-3} - (x^2 + z^2) \sin(xz).$$

b) Die Umkehrformeln für Zylinderkoordinaten lauten

$$\varrho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi(x, y) = \arctan \frac{y}{x}, \quad z = z,$$

sofern $x > 0$ und $y > 0$ gilt. Mit Hilfe der verallgemeinerten Kettenregel erhalten wir folglich

$$\begin{aligned} f_x &= \tilde{f}_\varrho \cdot \varrho_x + \tilde{f}_\varphi \cdot \varphi_x, \\ f_y &= \tilde{f}_\varrho \cdot \varrho_y + \tilde{f}_\varphi \cdot \varphi_y, \\ f_z &= \tilde{f}_z. \end{aligned}$$

Mit der Produktregel und nochmals der Kettenregel bekommen wir

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \left(\tilde{f}_{\varrho\varrho} \varrho_x + \tilde{f}_{\varrho\varphi} \varphi_x \right) \varrho_x + \tilde{f}_\varrho \varrho_{xx} + \left(\tilde{f}_{\varphi\varrho} \varrho_x + \tilde{f}_{\varphi\varphi} \varphi_x \right) \varphi_x + \tilde{f}_\varphi \varphi_{xx}, \\ f_{yy} &= \left(\tilde{f}_{\varrho\varrho} \varrho_y + \tilde{f}_{\varrho\varphi} \varphi_y \right) \varrho_y + \tilde{f}_\varrho \varrho_{yy} + \left(\tilde{f}_{\varphi\varrho} \varrho_y + \tilde{f}_{\varphi\varphi} \varphi_y \right) \varphi_y + \tilde{f}_\varphi \varphi_{yy}, \\ f_{zz} &= \tilde{f}_{zz}. \end{aligned}$$

Also ist Δf gleich

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\varrho\varrho}(\varrho_x^2 + \varrho_y^2) + 2\tilde{f}_{\varrho\varphi}(\varrho_x \varphi_x + \varrho_y \varphi_y) + \tilde{f}_{\varphi\varphi}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + \\ \tilde{f}_\varrho(\varrho_{xx} + \varrho_{yy}) + \tilde{f}_\varphi(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + \tilde{f}_{zz}. \end{aligned}$$

Nun sind

$$\begin{aligned} \varrho_x &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos(\varphi), \\ \varrho_y &= \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin(\varphi). \end{aligned}$$

Um φ_x zu berechnen, differenzieren wir die Gleichung $x = \varrho(x, y) \cos(\varphi(x, y))$ partiell nach x . Es folgt

$$1 = \varrho_x \cos(\varphi) - \varrho \sin(\varphi) \varphi_x$$

und somit

$$\varphi_x = \frac{\varrho_x \cos(\varphi) - 1}{\varrho \sin(\varphi)} = \frac{\cos^2(\varphi) - 1}{\varrho \sin(\varphi)} = -\frac{\sin^2(\varphi)}{\varrho \sin(\varphi)} = -\frac{\sin(\varphi)}{\varrho}.$$

Analog erhalten wir $\varphi_y = \frac{\cos(\varphi)}{\varrho}$. Schliesslich sind

$$\begin{aligned} \varrho_{xx} &= \frac{\sin^2(\varphi)}{\varrho}, \\ \varrho_{yy} &= \frac{\cos^2(\varphi)}{\varrho}, \\ \varphi_{xx} &= \frac{2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\varrho^2}, \\ \varphi_{yy} &= -\frac{2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\varrho^2}, \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

wobei wir die genauen Rechnungen nicht angeschrieben haben. Durch Einsetzen erhalten wir nun

$$\Delta f = \tilde{f}_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho} \tilde{f}_{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \tilde{f}_{\varphi\varphi} + \tilde{f}_{zz}.$$

c) In Zylinderkoordinaten haben wir $\tilde{f}(\varrho, \varphi, z) = \varphi z^{-1} - 2z\varrho$. Also gilt

$$\tilde{f}_{\varrho} = -2z, \quad \tilde{f}_{\varrho\varrho} = 0, \quad \tilde{f}_{\varphi} = \frac{1}{z}, \quad \tilde{f}_{\varphi\varphi} = 0, \quad \tilde{f}_z = -\frac{\varphi}{z^2} - 2\varrho, \quad \tilde{f}_{zz} = \frac{2\varphi}{z^3}.$$

Folglich ist

$$\Delta f(x, y, z) = \tilde{f}_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho} \tilde{f}_{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \tilde{f}_{\varphi\varphi} + \tilde{f}_{zz} = \frac{2\varphi}{z^3} - \frac{2z}{\varrho}.$$

7. a) Berechnen Sie

$$\iint_D x^2 y^2 \, dF,$$

wobei D das durch die Kurven $y = x^2$ und $y = 1$ eingeschlossene Gebiet bezeichnet.

b) Berechnen Sie

$$\iint_D x e^{x+y} \, dF,$$

wobei $D = [0, 1] \times [0, 1]$ das Einheitsquadrat bezeichnet.

c) Berechnen Sie

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} \, dF,$$

wobei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ den Einheitskreis bezeichnet.

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y^2 \, dF &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 y^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 x^2 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^1 \, dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 x^2 (1 - x^6) \, dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (x^2 - x^8) \, dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^9}{9} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\iint_D x e^{x+y} \, dF = \int_0^1 \int_0^1 x e^{x+y} \, dy \, dx = \int_0^1 x [e^{x+y}]_{y=0}^{y=1} \, dx = \int_0^1 x (e^{x+1} - e^x) \, dx.$$

Mittels partieller Integration erhalten wir

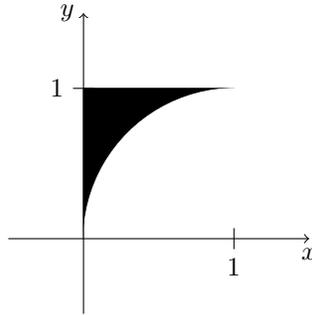
$$\begin{aligned} \int_0^1 x (e^{x+1} - e^x) \, dx &= [x(e^{x+1} - e^x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (e^{x+1} - e^x) \, dx \\ &= e^2 - e - [e^{x+1} - e^x]_{x=0}^{x=1} = e^2 - e - (e^2 - e - e + 1) = e - 1. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

c) Wir rechnen in Polarkoordinaten, setzen also $x = r \cos \phi$ und $y = r \sin \phi$ für $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Das Flächenelement berechnet sich dann als $dF = r d\phi dr$ und das gesuchte Integral ist gleich

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\phi dr = 2\pi \int_0^1 r e^{-r^2} dr = -\pi \int_0^1 -2r e^{-r^2} dr = -\pi [e^{-r^2}]_0^1 = \pi \left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

8. Sei $S = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$.



Berechne den Schwerpunkt von S .

Lösung: Sei F_S die Fläche von S . Da S ein Einheitsquadrat minus einen Viertelkreis von Radius 1 ist, gilt

$$F_S = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Für die x -Koordinate x_S des Schwerpunkts gilt

$$\begin{aligned} F_S x_S &= \int_0^1 \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^1 x dy dx \\ &= \int_0^1 (1 - \sqrt{1-(x-1)^2}) x dx \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} x dx \\ &= \frac{1}{2} - \int_{-1}^0 \sqrt{1-u^2} (u+1) du. \end{aligned}$$

Wir haben

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1-u^2} dx = \text{Fläche(Viertelkreis)} = \frac{\pi}{4}.$$

Andererseits gilt per Substitution $v = u^2$, dass

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1-u^2} u du = \frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{1-v} dv = \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{3} (1-v)^{\frac{3}{2}} \right]_1^0 = -\frac{1}{3}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$x_S = \frac{1}{1 - \frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \right) \approx 0.2234.$$

Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt auf der Geraden $y = 1 - x$, also gilt

$$y_S = 1 - x_S \approx 0.7766.$$