1. Die Fläche S sei einerseits durch die Parameterdarstellung $(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$ und andererseits durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ gegeben. Wir betrachten einen festen Punkt P_0 mit Ortsvektor (u_0, v_0) auf der Fläche S. Dann gilt: Die Vektoren $\mathrm{grad}(f(P_0))$ und $\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$

(a) sind gleich.

(b) sind entgegengesetzt gleich.

$\surd$ (c) sind parallel.

(d) stehen senkrecht aufeinander.

(e) sind weder parallel noch stehen sie senkrecht aufeinander.

Wir wissen aus IV.7, dass der Gradient senkrecht auf der Niveaufläche $f(x, y, z) = 0$ steht. Aus VI.3 wissen wir, dass das Vektorprodukt $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ senkrecht auf der Fläche S steht. Folglich müssen die beiden Vektoren parallel sein. Sie müssen nicht gleich oder entgegengesetzt gleich sein (wir können f, und damit den Gradienten von f, beliebig reskalieren und erhalten die gleiche Fläche S).

2. Es sei eine Fläche durch die Parameterdarstellung $(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$ gegeben. Der Vektor $\vec{n}(u, v)$ bezeichnet den Normaleneinheitsvektor zur Fläche. Es bezeichne P_0 den Punkt auf der Fläche, der zu (u_0, v_0) gehört. Klicken Sie die *richtigen* Aussagen an.

$\surd$ (a) Der Vektor $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ liegt in einer Tangentialebene zur Fläche im Punkte P_0.

$\surd$ (b) Wenn $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ und $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ linear unabhängig sind, dann spannen sie die Tangentialebene zur Fläche im Punkte P_0.

(c) $\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$.

$\surd$ (d) Der Vektor $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ ist tangential an die u-Linie, die durch P_0 geht.

Aussagen (a) und (b) stimmen, da die Tangentialebene durch die Vektoren $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ und $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ aufgespannt wird.

Aussage (d) stimmt, da $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ gerade die Richtungsableitung entlang der u-Linie ist.

Die einzig falsche Aussage ist (c), denn

$$\vec{n}(u_0, v_0) = \pm \frac{\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)}{|\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)|}.$$

3. Der Oberflächeninhalt des Graphs $z = f(x, y)$ einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist

(a) $\displaystyle\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

√ (b) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(c) $\displaystyle\iint_D |f_x(x,y) \times f_y(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Eine Parametrisierung des Graphs ist durch

$$(x, y) \mapsto \vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

gegeben. Es gilt

$$\vec{r}_x(x,y) = (1, 0, f_x(x,y))$$
$$\vec{r}_y(x,y) = (0, 1, f_y(x,y))$$
$$\vec{r}_x(x,y) \times \vec{r}_y(x,y) = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1).$$

Daher

$$d\mathcal{O} = \sqrt{f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y) + 1}\,dxdy$$

und

$$\mathcal{O} = \iint_D \sqrt{f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y) + 1}\,dxdy.$$

4. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v}\colon (x, y, z) \mapsto \big(x, y^2 + z, 3x\big)$$

durch das Dreieck D mit Ecken $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$ in Richtung $\vec{n} = (0,0,1)$.

√ (a) $\frac{1}{2}$

(b) 3

(c) $-\frac{1}{2}$

$D = \{(x, y, 0) \,|\, x \in [0,1],\, y \in [0, 1-x]\}$.
Der Fluss ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_D \vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)\mathrm{d}O\\ &= \int_0^1\int_0^{1-x}\begin{pmatrix}x\\ y^2+0\\ 3x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^{1-x} 3x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= 3\int_0^1 x((1-x)-0)\,\mathrm{d}x = 3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

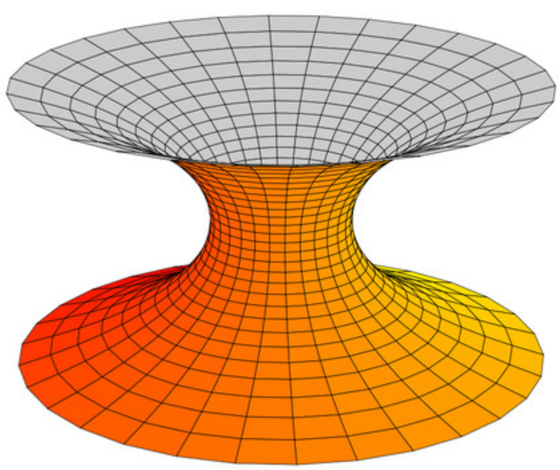
5. Eine Rotationsfläche $M \subset \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(u,\, v) = (\cosh(v)\cos(u),\, \cosh(v)\sin(u),\, v)\,,$$

mit $(u,\, v) \in [0,\, 2\pi] \times [-1,\, 1]$. Die Fläche M heisst Katenoid und ist eine sogenannte Minimalfläche. (Eine Minimalfläche einer Kurve ist eine Fläche, deren Rand gerade die Kurve ist und gleichzeitig unter solchen Flächen ein lokales Minimum im Flächeninhalt hat.)

a) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt $A(M)$.

b) Verifizieren Sie, dass der Flächeninhalt eines Zylindermantels mit Radius $\cosh 1$ und Höhe 2 grösser ist als $A(M)$.



Bitte wenden!

Lösung:

a) Wir bestimmen das Obeflächenelement:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_u(u,v) &= (-\cosh v \sin u,\ \cosh v \cos u,\ 0)\\
\vec{r}_v(u,v) &= (\sinh v \cos u,\ \sinh v \sin u,\ 1)\\
(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(u,v) &= (\cosh v \cos u,\ \cosh v \sin u,\ -\sinh v \cosh v)\\
\|(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(u,v)\|^2 &= \cosh^2 v \left(\cos^2 u + \sin^2 u\right) + \sinh^2 v \cosh^2 v = \cosh^2 \left(1 + \sinh^2 v\right) = \cosh^4 v\\
\Longrightarrow \mathrm{d}A &= \cosh^2 v \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Dann ist der Oberflächeninhalt des Katenoides:

$$\begin{aligned}
A(M) &= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \cosh^2 v \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = 2\pi \int_{-1}^{1} \cosh^2 v \, \mathrm{d}v = 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{1+\cosh 2v}{2} \, \mathrm{d}v\\
&= 2\pi \left(1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \cosh 2v \, \mathrm{d}v\right) = 2\pi \left(1 + \int_{0}^{1} \cosh 2v \, \mathrm{d}v\right)\\
&= 2\pi \left(1 + \frac{1}{2} \sinh 2\right) = (2 + \sinh 2)\, \pi \approx 5.6269\pi
\end{aligned}$$

b) Der Flächeninhalt eines Zylindermantels mit Radius $\cosh 1$ und Höhe 2 beträgt $(4\cosh 1)\pi \approx 6.1723\pi$.

6. Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = (1-x, 1-y, 1+z)$$

sowie die Fläche S mit der Parameterdarstellung

$$(u,v) \mapsto \vec{r}(u,v) = (u-v, u+v, uv)$$

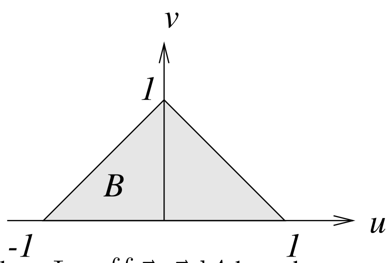
und dem Parameterbereich

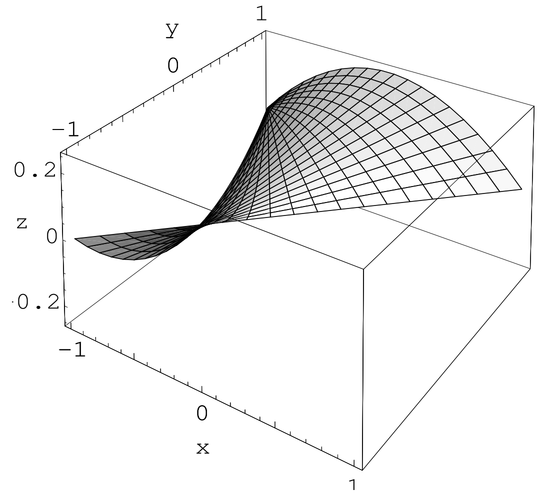
$$B = \left\{(u,v) \;\middle|\; 0 \le v \le 1,\ |u| \le 1-v\right\}.$$

Berechnen Sie den Fluss des Feldes $\vec{v}$ von oben nach unten durch die Fläche S.

Siehe nächstes Blatt!

Lösung:





Für den Fluss $\Phi = \iint\limits_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A$ berechnet man den Normalenvektor

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (1,\, 1,\, v) \times (-1,\, 1,\, u) = (u - v,\, -u - v,\, 2)\,,$$

der nach oben zeigt. So erhält man für den Fluss durch die Sattelfläche S

$$\Phi = -\iint\limits_B \vec{v}\big(\vec{r}(u,v)\big) \cdot \big(\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)\big)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = -\int\limits_0^1 \int\limits_{v-1}^{1-v} \begin{pmatrix} 1-u+v \\ 1-u-v \\ 1+uv \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} u-v \\ -u-v \\ 2 \end{pmatrix}^T \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

$$= -\int\limits_0^1 \int\limits_{v-1}^{1-v} 2\,(3uv - v + 1)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = -2 \int\limits_0^1 \Big[\tfrac{3}{2}u^2 v - uv + u\Big]_{v-1}^{1-v} \mathrm{d}v = -4 \int\limits_0^1 (v-1)^2\, \mathrm{d}v = -\frac{4}{3}\,.$$

7. Gegeben sei das Vektorfeld

$$v(x,y) = (2x + y, x - y)$$

In dieser Aufgabe berechnen wir den Fluss durch die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 1$ nach aussen.

a) Parametrisieren Sie die Ellipse durch eine Funktion $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$.

b) Beim Punkt $\gamma(t)$ berechnen Sie den Tangentialvektor gegeben durch die Ableitung $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$. Finden Sie den nach aussen zeigenden Normalenvektor $n(t)$ zur Ellipse mit gleicher Länge wie $\dot{\gamma}(t)$.

c) Berechnen Sie den Fluss von v durch die Ellipse nach aussen gegeben durch

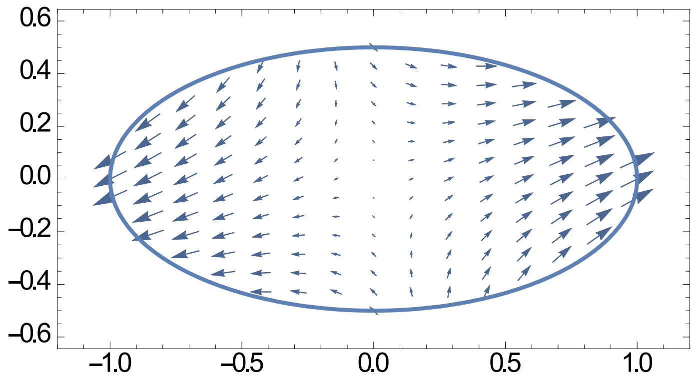
$$\int_a^b v(\gamma(t)) \cdot n(t) dt,$$

wobei wir das zweidimensionale Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

verwenden.

Bitte wenden!



Lösung:

a) Die Parametrisierung der Ellipse ist gegeben durch

$$\gamma(t) = (\cos t, \frac{1}{2}\sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

b) Durch Ableiten erhalten wir den Tangentialvektor an die Ellipse

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \frac{1}{2}\cos t)$$

und somit den Normalenvektor, welcher nach aussen zeigt, nämlich

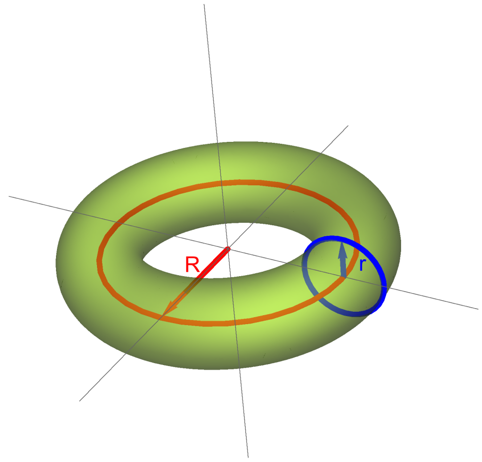
$$n(t) = (\frac{1}{2}\cos t, \sin t).$$

c) Der Fluss des Vektorfeldes v nach aussen durch die Ellipse ist gegeben als Flussintegral

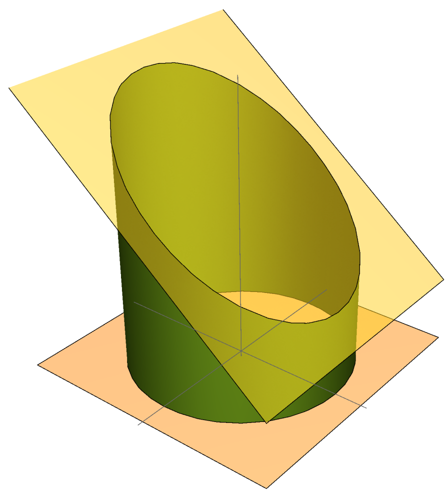
$$\begin{aligned} F &= \int_0^{2\pi} v(\gamma(t)) \cdot n(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos t + \frac{1}{2}\sin t \\ \cos t - \frac{1}{2}\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t + \frac{5}{4}\sin t\cos t - \frac{1}{2}\sin^2 t\, dt \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

8. a) Berechne die Oberfläche eines Rotationstorus mit grossem Radius R und kleinem Radius r (siehe Abbildung).

Siehe nächstes Blatt!



b) Bestimme die Mantelfläche des Zylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 16\}$ zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 16 - 2x$.



Lösung:

a) Ein Rotationstorus ist die Menge aller Punkte in $\mathbb{R}^3$, die von einem Kreis mit Radius R den Abstand r besitzen (das funktioniert für $0 < r < R$).
Der grosse Kreis mit Radius R in der xy-Ebene ist parametrisiert durch

$$(R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0), \quad \text{für } \varphi \in [0, 2\pi].$$

Ein kleiner Kreis mit Radius r hat einen Mittelpunkt $\vec{p} = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0)$ für ein festes φ und liegt in der Ebene, die durch $\vec{p}$ und $(0, 0, 1)$ aufgespannt ist. Damit ist der kleine Kreis parametri-

Bitte wenden!

siert durch

$$\begin{aligned}
\vec{t}(\varphi, \alpha) &= \vec{p} + r\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\cos\alpha + r\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\sin\alpha \\
&= \begin{pmatrix}R\cos\varphi\\R\sin\varphi\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\\0\end{pmatrix}\cos\alpha + \begin{pmatrix}0\\0\\r\sin\alpha\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}(R + r\cos\alpha)\cos\varphi\\(R + r\cos\alpha)\sin\varphi\\r\sin\alpha\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

mit $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Lassen wir nun auch φ wieder laufen, so erhalten wir die gesuchte Parametrisierung der Oberfläche.
Um den Flächeninhalt zu bestimmen, berechnen wir

$$\vec{t}_\varphi(\varphi, \alpha) = \begin{pmatrix}-(R + r\cos\alpha)\sin\varphi\\(R + r\cos\alpha)\cos\varphi\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{t}_\alpha(\varphi, \alpha) = \begin{pmatrix}-r\sin\alpha\cos\varphi\\-r\sin\alpha\sin\varphi\\r\cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
|\vec{t}_\varphi \times \vec{t}_\alpha| &= \left|\begin{pmatrix}r(R + r\cos\alpha)\cos\alpha\cos\varphi\\r(R + r\cos\alpha)\cos\alpha\sin\varphi\\r(R + r\cos\alpha)\sin\alpha(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\end{pmatrix}\right| \\
&\overset{(*)}{=} r(R + r\cos\alpha)\left|\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\varphi\\\cos\alpha\sin\varphi\\\sin\alpha\end{pmatrix}\right| = r(R + r\cos\alpha)
\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
A = \iint_S \mathrm{d}A &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\vec{t}_\varphi \times \vec{t}_\alpha|\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\alpha \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos\alpha)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\alpha \\
&= 2\pi r\int_0^{2\pi}(R + r\cos\alpha)\mathrm{d}\alpha \\
&= 2\pi r\left[R\alpha + r\sin\alpha\right]_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} = 4\pi^2 Rr.
\end{aligned}$$

Interessanterweise entspricht dies dem Mantelflächeninhalt eines Zylinders mit Radius r und Höhe $2\pi R$, also dem *aufgebogenen* Torus.
Beachte: Im Schritt (*) dürfen wir die Betragsstriche weglassen, da $R + r\cos\alpha$ immer positiv ist; konkret gilt

$$R + r\cos\alpha \geq R - r > 0.$$

b) Ein Zylinder mit Radius 4 ist parametrisiert durch

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix}4\cos u\\4\sin u\\v\end{pmatrix}.$$

Die Ebene $z = 16 - 2x$ schneidet den Zylinder in der Ellipse

$$\{(4\cos u, 4\sin u, 16 - 8\cos u) : 0 \leq u \leq 2\pi\}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Deswegen ist die Parametrisierung des abgesägten Zylindermantels gegeben durch

$$U = \{(u,v) : 0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le 16 - 8\cos u\}.$$

Zusammen mit

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \left| \begin{pmatrix} -4\sin u \\ 4\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4\cos u \\ 4\sin u \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 4$$

bekommen wir für die Mantelfläche

$$\begin{aligned} A &= \iint_S 1 \mathrm{d}A = \iint_U |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \mathrm{d}v\mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} \int_0^{16-8\cos u} 4\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\ &= 4\int_0^{2\pi} (16 - 8\cos u)\mathrm{d}u = 4\left[16u - 8\sin u\right]_{u=0}^{u=2\pi} = 128\pi. \end{aligned}$$