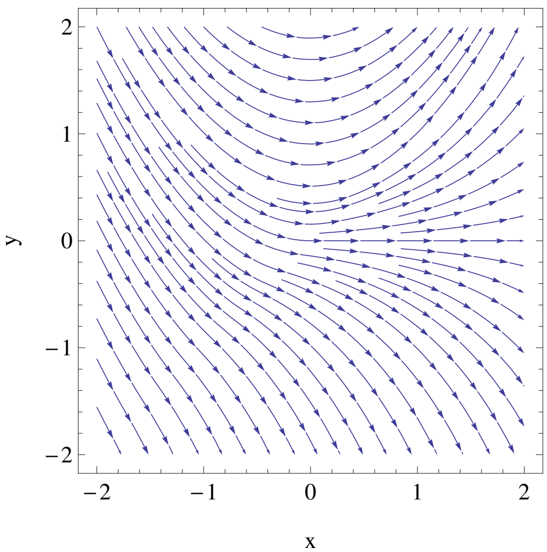
Lösung - Serie 22

1. Welche der folgenden Differentialgleichungen hat das gegebene Richtungsfeld?



(a) $y' = x + y$

(b) $y' = x - y$

√ (c) $y' = \min\{x, y\}$

(d) $y' = \max\{x, y\}$

(e) $y' = |y| - |x|$

Die korrekte Antwort lautet (c). Die anderen kann man auf verschiedene Weisen ausschliessen. Zum Beispiel ist die Richtung entlang der positiven x-Achse und der positiven y-Achse horizontal, also gilt dort $y' = 0$, und das ist nur in (c) der Fall. Oder man stellt fest, dass die Steigung entlang keiner der beiden Diagonalen gleich Null ist, was (a), (b) und (e) ausschliesst. Oder man entdeckt, dass die Richtung oberhalb der Hauptdiagonale nur von y, und unterhalb davon nur von x abhängt, und auch das nur für (c) gilt. Usw.

2. Welche Ordnung hat die Differentialgleichung $y'' - x^2y' + y^4 = 0$?

(a) -1

(b) 0

(c) 1

$\surd$ (d) 2

(e) 4

Die *Ordnung* einer Differentialgleichung (in y) ist die höchste Ableitung (von y), die in der Gleichung auftritt.

3. Klicken Sie die **falsche** Aussage an:

Die Differenzialgleichung $\frac{x^2}{2}y'' - xy' + y = 0$

(a) besitzt die Funktion $y : x \to x$ als Lösung;

(b) besitzt die Funktion $y : x \to x^2$ als Lösung;

(c) besitzt unendlich viele Lösungen;

$\surd$ (d) besitzt genau zwei Lösungen.

Durch Einsetzen verifiziert man leicht, dass

$$y(x) = x \quad \text{und} \quad y(x) = x^2$$

die Differenzialgleichung lösen. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung besteht aus einem Schar von (unendlich vielen) Lösungskurven. Zu vorgegebenen Anfangsbedingungen würde nach Satz 8.1 (Stammbach, Analysis I/II, Kapitel VII.8) eine eindeutig bestimmte Lösung (aber nie genau zwei) geben.

4. Die Substitution

$$y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

in der Differenzialgleichung

$$x^2y + 2xy' + y'' = -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

liefert...

(a) $x^2g + 2xg' + g'' = -2\cos x$

(b) $-x^2g + 2xg' + g'' = -2\cos x$

√ (c) $g'' - g = -2\cos x$

(d) $g'' - xg' = -2\cos x$

Mit $y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ folgt

$$\begin{aligned} y'(x) &= g'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + g(x)\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (g'(x) - xg(x))\,e^{-\frac{x^2}{2}} \\ y''(x) &= (g''(x) - g(x) - xg'(x))\,e^{-\frac{x^2}{2}} + (g'(x) - xg(x))\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \left(g''(x) + \left(x^2-1\right)g(x) - 2xg'(x)\right)e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

In die Differenzialgleichung $x^2y + 2xy' + y'' = -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ eingesetzt, erhält man

$$\begin{aligned} x^2ge^{-\frac{x^2}{2}} + 2x\,(g' - xg)\,e^{-\frac{x^2}{2}} + \left(g'' + \left(x^2-1\right)g - 2xg'\right)e^{-\frac{x^2}{2}} &= -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \\ \Longleftrightarrow g'' - g &= -2\cos x. \end{aligned}$$

5. Betrachten Sie die Tangente an den Graphen der Funktion $x \mapsto y(x)$ im Punkt $(x, y(x))$. Wie lautet die Differenzialgleichung dafür, dass diese Tangente die x-Achse im vorgegebenen Abstand c vom Punkt $(x, 0)$ schneidet?

(a) $x - \frac{y}{y'} = c$

(b) $\frac{y}{y'} = c$

(c) $yy' = c$

√ (d) $\left|\frac{y}{y'}\right| = c$

Die Tangente schneidet die x-Achse in dem Punkt $x - \frac{y}{y'}$. Sein Abstand von dem Punkt x ist der Absolutbetrag der Differenz, also ist (d) korrekt.

6. Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme (alle diese Differenzialgleichungen sind separierbar):

Bitte wenden!

a) $\left(x^2+3\right)y'+2xy=x$,
mit $y(0)=1$.

b) $y'=xe^{x+y}$, mit $y(1)=-1$.

c) $y'=\frac{\cos^2 y}{\sin^2 x}$, mit $y(\frac{\pi}{2})=0$.

d) $yy'=xy^2+2x$, mit $y(-1)=-1$. Existenzintervall?

e) $y'=\alpha\sqrt{y}-\beta y$, mit $y(0)=0$.

f) $\left(x^2+x-6\right)y' = \frac{5}{2y}$, mit $x > 5$ und $\lim_{x\to\infty} y(x)=-1$.

Lösung:

a) Die Differentialgleichung

$$(x^2+3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=x$$

ist separierbar. Man erhält

$$\frac{\mathrm{d}y}{1-2y}=\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+3}.$$

Integration liefert

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2y|=\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+\frac{1}{2}\ln C.$$

Damit ist

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2c(x^2+3)}$$

die allgemeine Lösung. (Das Vorzeichen haben wir in die Konstante c integriert.) Die Anfangsbedingung $y(0)=1$ liefert $c=-\frac{1}{3}$. Die gesuchte Lösung ist also

$$y=\frac{3}{2(x^2+3)}+\frac{1}{2}.$$

b) Die Differenzialgleichung ist separierbar.

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{x}=e^{x+y} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}e^{-y}=xe^x \Longrightarrow \int e^{-y}\mathrm{d}y=\int \underbrace{x}_{\downarrow}\underbrace{e^x}_{\uparrow}\mathrm{d}x \\
&\Longrightarrow \quad \underbrace{-e^{-y}}_{<0}=xe^x-\int e^x\mathrm{d}x=e^x\,(x-1)-c, \qquad c\in\mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad -y=\ln\underbrace{\left(e^x\,(1-x)+c\right)}_{>0} \\
&\Longleftrightarrow \quad y(x)=\ln\left(\frac{1}{e^x\,(1-x)+c}\right)
\end{aligned}$$

Es gilt weiter

$$y(1)=-1\Longrightarrow \ln\left(\frac{1}{c}\right)=\ln 1-\ln c=-1\Longleftrightarrow c=e.$$

Damit folgt

$$y(x)=\ln\left(\frac{1}{e^x\,(1-x)+e}\right).$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Die Differenzialgleichung ist separierbar. Somit ist

$$y' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 x} \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{\cos^2 y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} \Longrightarrow \tan y = -\cot x + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$, und daraus folgt

$$y(x) = \arctan\left(-\cot x + c\right).$$

Wir setzen nun die Anfangsbedingung $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ ein. Es gilt $\cot\frac{\pi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = 0$ und $\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = 0$. Also muss $c = 0$ sein, und damit

$$y(x) = \arctan(-\cot x).$$

Bemerkung: Interessanterweise ist $y(x) = x - \frac{\pi}{2}$ im Existenzintervall. Beweise das!

d) Die Differenzialgleichung

$$y' = yx + 2\frac{x}{y} = x\left(y + \frac{2}{y}\right)$$

ist separierbar. Dann ist

$$\begin{aligned}
& \frac{y'}{y+\frac{2}{y}} = \frac{1}{2}\frac{2yy'}{y^2+2} = x \\
\Longrightarrow\quad & \frac{1}{2}\ln\big(\underbrace{y^2+2}_{>0}\big) = \frac{x^2}{2} + c \\
\Longrightarrow\quad & y^2 + 2 = e^{x^2+2c} = e^{x^2}\cdot e^{2c},
\end{aligned}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$. Nach y aufgelöst ergibt sich

$$y(x) = \pm\sqrt{ke^{x^2} - 2} \quad \text{mit} \quad k = e^{2c}.$$

Für die Anfangsbedingung $y(-1) = -1$ müssen wir die negative Lösung nehmen:

$$-1 = y(-1) = -\sqrt{ke^{(-1)^2} - 2} \quad\Longrightarrow\quad 1 = ke - 2,$$

also $k = \frac{3}{e}$, und $y(x) = -\sqrt{3e^{x^2-1} - 2}$.
Da der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ sein darf, erhalten wir $3e^{x^2-1} \geq 2$, also $x^2 - 1 \geq \ln\frac{2}{3}$, d.h. (für negative x gemäss der Anfangsbedingung)

$$x \leq -\sqrt{1 + \ln\tfrac{2}{3}}.$$

Das Existenzintervall für unsere Lösung ist also $\left(-\infty, -\sqrt{1+\ln\frac{2}{3}}\right]$.

e) Die Differenzialgleichung ist separierbar.

$$\begin{aligned}
y' \quad &= \quad \alpha\sqrt{y} - \beta y \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{\alpha\sqrt{y} - \beta y} = \int \mathrm{d}x \\
\overset{u=\sqrt{y}}{\Longleftrightarrow} \quad & \int \frac{\mathrm{d}y}{\alpha\sqrt{y} - \beta y} = \int \frac{2u\mathrm{d}u}{\alpha u - \beta u^2} = \int \mathrm{d}x \\
\Longleftrightarrow \quad & 2\int \frac{\mathrm{d}u}{\alpha - \beta u} = \int \mathrm{d}x \Longleftrightarrow \ln|\alpha - \beta u| = -\frac{\beta x}{2} - \frac{\beta c}{2}, \quad c \in \mathbb{R} \\
\Longleftrightarrow \quad & |\alpha - \beta u| = e^{-\frac{\beta x}{2}} \cdot e^{-\frac{\beta c}{2}} \Longleftrightarrow \alpha - \beta u = Ke^{-\frac{\beta x}{2}} \quad \text{mit} \quad K = \pm e^{-\frac{\beta c}{2}} \\
\Longleftrightarrow \quad & u = -\frac{K}{\beta}e^{-\frac{\beta x}{2}} + \frac{\alpha}{\beta}
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Es folgt mit $u = \sqrt{y}$, dass

$$\sqrt{y} = -\frac{K}{\beta} e^{-\frac{\beta x}{2}} + \frac{\alpha}{\beta}. \tag{1}$$

Da die Lösung durch $(0,0)$ gehen soll (setze $(x,y) = (0,0)$ in (1) ein), folgt $K = \alpha$. Damit ist

$$y(x) = \left(-\frac{\alpha}{\beta} e^{-\frac{\beta x}{2}} + \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left(1 - e^{-\frac{\beta x}{2}} \right)^2.$$

f) Da $x \neq 2$ und $x \neq -3$, gilt

$$\begin{aligned} \left(x^2 + x - 6\right) y' = \frac{5}{2y} \Longleftrightarrow \left(y^2\right)' \quad &= \quad 2y'y = \frac{5}{x^2 + x - 6} \\ &= \quad \frac{5}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}. \end{aligned}$$

Integration liefert dann

$$\begin{aligned} y(x)^2 \quad &= \quad \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= \quad \ln|x-2| - \ln|x+3| + C = \ln\left| \frac{x-2}{x+3} \right| + C, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$. Wir bestimmen die Konstante C

$$\begin{aligned} 1 \quad &= \quad (-1)^2 \overset{(*)}{=} \left(\lim_{x\to\infty} y(x) \right)^2 \overset{(**)}{=} \lim_{x\to\infty} y(x)^2 \overset{(2)}{=} \lim_{x\to\infty} \left(\ln\left| \frac{x-2}{x+3} \right| + C \right) \\ &\overset{(***)}{=} \lim_{x\to\infty} \ln\left| \frac{x-2}{x+3} \right| + \lim_{x\to\infty} C = \lim_{x\to\infty} \ln\left| \frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}} \right| + C \\ &\overset{(****)}{=} \ln\left| \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}} \right) \right| + C = \ln(1) + C = C, \end{aligned}$$

wobei wir Folgendes benutzt haben
(*) $\lim_{x\to\infty} y(x) = -1$
(**) Stetigkeit der Funktion $x \longmapsto x^2$
(***) Grenzwertregel
(****) Stetigkeit der Logarithmusfunktion und der Betragsfunktion.
Damit ist

$$y(x)^2 = \ln\left| \frac{x-2}{x+3} \right| + 1,$$

und aus $\lim_{x\to\infty} y(x) = -1$ (impliziert das Minuszeichen vor der Wurzel) folgt, dass

$$y(x) = -\sqrt{\ln\left| \frac{x-2}{x+3} \right| + 1}.$$

7. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'x^2 = -xy - x^2 - y^2.$$

Man finde die Lösung, die durch die Anfangsbedingung $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ gegeben ist, und bestimme deren Nullstellen. *Hinweis:* Substitution!

Siehe nächstes Blatt!

Lösung: Auflösen nach y' führt zu

$$y' = -\frac{y}{x} - 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 .$$

In diesem Fall drängt sich die Substitution $u = \frac{y}{x}$ auf. Aus $y = ux$ folgt $y' = u'x + u$, und eingesetzt

$$u'x + u = -u - 1 - u^2 \quad \text{oder} \quad u'x = -(u+1)^2 .$$

Diese Differentialgleichung ist separierbar:

$$\frac{u'}{(u+1)^2} = -\frac{1}{x} \implies -\frac{1}{u+1} = -\ln|x| - c \quad \text{oder} \quad u + 1 = \frac{1}{\ln|x| + c}, \ c \in \mathbb{R}.$$

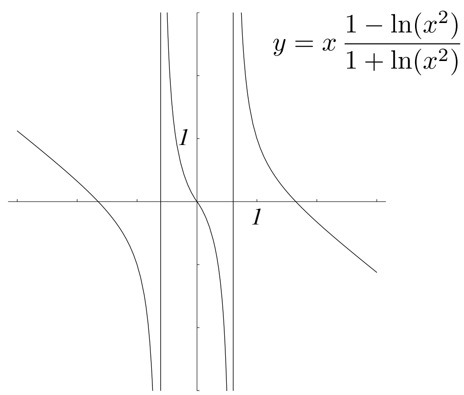
Man macht die Substitution rückgängig und erhält

$$\frac{y}{x} + 1 = \frac{1}{\ln|x| + c} \quad \text{oder} \quad y = x\left(\frac{1}{\ln|x| + c} - 1\right).$$

Aus der Anfangsbedingung $(x_0, y_0) = (1, 1)$ berechnet man der Wert $c = \frac{1}{2}$. Man kann das Resultat noch umformen zu

$$y = x\,\frac{1 - 2\ln|x|}{1 + 2\ln|x|} = x\,\frac{1 - \ln(x^2)}{1 + \ln(x^2)} .$$

Die Nullstellen sind $x = 0$ und $x = \pm e^{1/2}$.



Aufgrund der auftretenden Pole kann man auch sagen, die Lösung sei nur für $x > e^{-1/2}$ definiert (da nach der Anfangsbedingung $x = 1$ im Definitionsbereich liegen muss). Dann ist $x = e^{1/2}$ die einzige Nullstelle.

8. **a)** Bestimme ein ebenes Vektorfeld $v(x, y)$, welches als Feldlinien alle Kreise mit Mittelpunkt in $(1, 1)$ besitzt.

b) Die Feldlinien des Vektorfelds $w(x, y) := (x, y + 1)$ sind für $x \neq 0$ Graphen von Lösungen einer Differentialgleichung. Wie lautet diese Differentialgleichung? Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

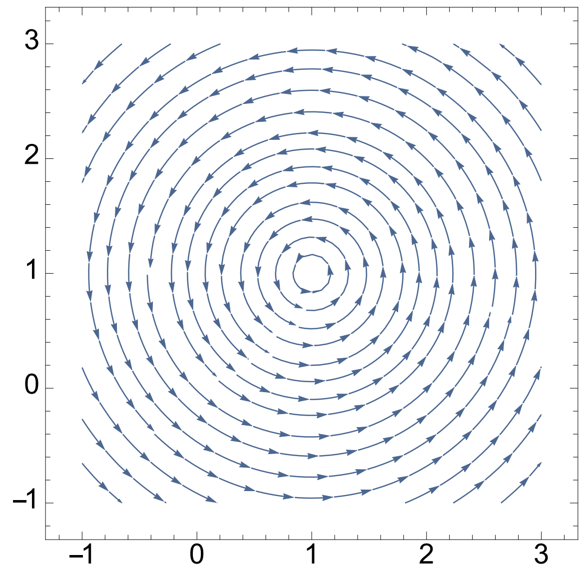
Lösung: Wir bestimmen die Feldlinien unter der Annahme, dass sie durch eine Funktion $y(x)$ gegeben sind.

Bitte wenden!

a) Die Kreise mit Mittelpunkt $(1, 1)$ sind gegeben durch

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2,$$

für den Radius $r > 0$ (das ist ein freier Parameter).



Wenn das die Feldlinien einer Differentialgleichung sind, so schreiben wir $y = y(x)$ und leiten nach x ab, das ergibt

$$2(x-1) + 2(y-1)y' = 0,$$

also

$$y' = -\frac{x-1}{y-1}.$$

Ein mögliches Vektorfeld ist also $v(x, y) := (1-y, x-1)$, oder jedes Vielfache davon.

b) Beschreibt die Funktion $y(x)$ die Feldlinien, so muss gelten $y' = \frac{w_2(x,y)}{w_1(x,y)} = \frac{y+1}{x}$. Diese Differentialgleichung ist separierbar, und zwar zu

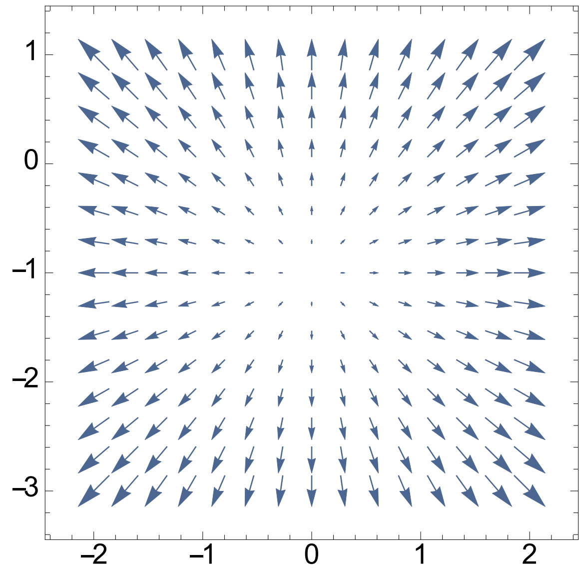
$$\frac{y'}{y+1} = \frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{y+1} dy = \int \frac{1}{x} dx,$$

also $\ln|y+1| = \ln|x| + C = \ln|x| + \ln e^C = \ln(e^C|x|)$. Aufgelöst nach y ergibt dies

$$y = \pm e^C x - 1,$$

für einen Parameter C, das sind also alle Geraden durch den Punkt $(0, -1)$.

Siehe nächstes Blatt!



9. Finden Sie die Lösung $t \mapsto x(t)$ der Differenzialgleichung

$$\ddot{x} = -\dot{x}^2 + 1$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$, und diskutieren Sie das Verhalten der Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ für $t \to \infty$.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst $v(t) = \dot{x}(t)$.

Lösung: Sei $v(t) = \dot{x}(t)$, dann lässt sich die DGL schreiben als

$$\dot{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -v^2 + 1 \implies \int \frac{\mathrm{d}v}{1 - v^2} = \int \mathrm{d}t.$$

Durch Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{v-1}{v+1} \right| &= t + C_1 \\ \ln \left| \frac{v+1}{v-1} \right| &= 2t + 2C_1 \\ \frac{v+1}{v-1} &= Ke^{2t} \qquad \text{wobei } K = \pm e^{2C_1} \\ v\left(1 - Ke^{2t}\right) &= -1 - Ke^{2t}. \end{aligned}$$

$$\implies \dot{x}(t) = v(t) = \frac{Ke^{2t} + 1}{Ke^{2t} - 1}$$

Aus $\dot{x}(0) = 0 = \frac{K+1}{K-1}$ folgt $K = -1$.

$$\lim_{x \to \infty} \dot{x}(t) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} = \lim_{x \to \infty} 1 - \frac{2}{e^{2t} + 1} = 1$$

Bitte wenden!

Für $x \to \infty$ konvergiert somit die Geschwindigkeit gegen 1.

$$
\begin{aligned}
x(t) = \int \dot{x} \mathrm{d}t = \int \frac{e^{2t}+1-2}{e^{2t}+1} \mathrm{d}t \ &= \int 1 - \frac{2}{e^{2t}+1} \mathrm{d}t = \\
= t - \int \frac{2}{e^{2t}(1+e^{-2t})} \mathrm{d}t \ &= t + \int \frac{-2e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \mathrm{d}t = t + \ln\left(1+e^{-2t}\right) + C_2
\end{aligned}
$$

Aus $x(0) = 0 = \ln(2) + C_2$ folgt $C_2 = -\ln(2)$ und damit ist die Lösung der DGL

$$
x(t) = t + \ln\left(\frac{1+e^{-2t}}{2}\right).
$$