Lösung - Serie 24

1. Welche der folgenden Differenzialgleichungen ist linear?

(a) $(y' - 2)^2 = y$

√ (b) $y'' + \dfrac{y'}{1-x^2} + \dfrac{y}{1+x} = \dfrac{1}{x^2}$

(c) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$

(d) $y'' + y' + y^2 = 0$

(e) $y = xy' + (y')^2$

Eine lineare Differenzialgleichung für eine Funktion $y(x)$ muss linear in y und y' sein, aber nicht notwendigerweise in x. Also ist (c) die richtige Antwort.

2. Gegeben seien Funktionen $s,\, t:\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Welche aus den folgenden Bedingungen garantieren die Exaktheit der Differenzialgleichung $s(x,y) = t(x,y) \cdot y'$?

(a) Für alle (x, y): $s_y(x,y) = t_x(x,y)$.

(b) Für alle (x, y): $s_x(x,y) = t_y(x,y)$.

√ (c) Für alle (x, y): $s_y(x,y) = -t_x(x,y)$.

(d) Für alle (x, y): $s_x(x,y) = -\frac{1}{t_y(x,y)}$.

(e) Keine.

Weil s und t einen einfach zusammenhängenden Definitionsbereich haben (nämlich das ganze $\mathbb{R}^2$), ist $s(x,y) - t(x,y) \cdot y' = 0$ genau dann exakt, wenn $s_y(x,y) = -t_x(x,y)$ (vgl. Stammbach, Analysis, Kap. VII.6).

3. Welche aus den folgenden Gleichungen sind exakt?

(a) $e^x \sin y + 3y - (3x - e^x \sin y)y' = 0.$

$\checkmark$ (b) $\left(\frac{y}{x} + 6x\right) + (\log x - 2)y' = 0,\ x > 0.$

(c) $(y \log x + xy)y' = -x \log y - xy.$

$\checkmark$ (d) $y' = -\frac{ax+by}{bx+cy},\ a, b, c, d > 0$ Konstante.

Eine Differentialgleichung ist exakt, wenn sie der Form $\varphi(x, y) + \psi(x, y)y' = 0$ ist, wobei $\varphi_y = \psi_x$. Die Differentialgleichungen in (b) und (d) können in dieser Form geschrieben werden, (a) und (c) hingegen nicht.

Siehe nächstes Blatt!

4. Welche Aussagen über die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar

$$x^2 + Cy^2 = 1$$

mit Scharparameter C sind korrekt?

√ (a) Die y–Achse ist eine Orthogonaltrajektorie.

√ (b) Alle Orthogonaltrajektorien, welche den Punkt $(0, 0)$ nicht treffen, sind geschlossene Kurven.

(c) Die Kurven der Form $y^2 + x^2 - \ln|x| = K$ mit $K \geq 1$ sind Orthogonaltrajektorien.

√ (d) Die Kurven der Form $y^2 + x^2 - \ln(x^2) = K$ mit $K \geq 1$ sind Orthogonaltrajektorien.

Die Differenzialgleichung der Kurvenschar $x^2 + C\,y^2 = 1$ erhält man durch Elimination des Scharparameters C. Durch totale Ableitung nach x erhält man $2\,x + C\,2\,yy' = 0$. $C = \frac{1-x^2}{y^2}$ $(y \neq 0)$ eingesetzt liefert

$$2x + \frac{1-x^2}{y^2} 2yy' = 0. \tag{1}$$

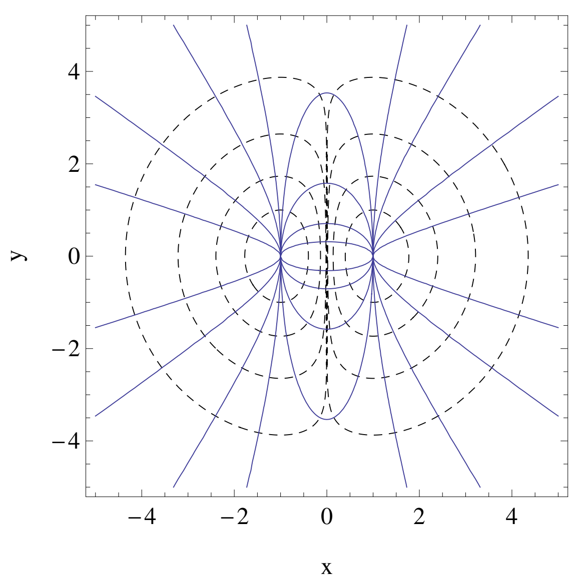
Falls $x = 0$, dann ist $y' = 0$ für alle y. D.h. die y–Achse ist eine Orthogonaltrajektorie, und somit ist (a) richtig. Die Differenzialgleichung der Orthogonaltrajektorien finden wir, indem wir in (1) die Ableitung y' durch $-1/y'$ ersetzen (siehe Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 52), also

$$yy' = \frac{1-x^2}{x}, \quad x \neq 0.$$

Integrieren liefert

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + \frac{K}{2} \quad \text{oder} \quad y^2 + \underbrace{x^2 - \ln(x^2)}_{\geq 1} = K$$

mit $K \geq 1$. Da dies für alle $x \neq 0$ gilt, folgt, dass (d) richtig ist und (c) falsch ist. Diese Orthogonaletrajektorien sind sowohl bezüglich der x–Achse als auch bezüglich der y–Achse symmetrisch. Sie befinden sich für ein gegebenes K in einem beschränkten Bereich auf der xy–Ebene, wie man in der folgenden Abbildung sehen kann.



Bitte wenden!

Die schwarzen Linien sind die Kurven der gegebenen Kurvenschar und die gestrichelten Linien sind deren Orthogonaltrajektorien. Diese Kurven sind geschlossen und damit ist (b) richtig. Die korrekte Antwort lautet also (c).

Siehe nächstes Blatt!

5. Betrachten Sie die 2-parametrige Schar

$$y_\omega(x) = C_1 \cosh(\omega x) + C_2 \sinh(\omega x)$$

mit Parametern C_1, C_2. Wählen Sie alle Differentialgleichungen aus, für die obiges $y_\omega(x)$ eine Lösung für jedes $\omega \neq 0$ ist.

√ (a) $y^{(4)} - \omega^4 y = 0$

(b) $y' - \omega y = 0$

(c) $y'' + \omega^2 y = 0$

(d) $y'' - \omega y = 0$

√ (e) $y'' - \omega^2 y = 0$

Für jede positive ganze Zahl k gelten die Gleichungen

$$y^{(2k-1)}(x) = C_1 \omega^{2k-1} \sinh(\omega x) + C_2 \omega^{2k-1} \cosh(x)$$

und

$$y^{(2k)}(x) = C_1 \omega^{2k} \cosh(\omega x) + C_2 \omega^{2k} \sinh(x).$$

Somit ist

$$y^{(2k)} - \omega^{2k} y = 0$$

für jedes solche k. Folglich sind (a) und (e) für alle $\omega \neq 0$ wahr. Ebenso ist klar, dass dies nicht der Fall für (b), (c) und (d) ist.

6. Bestimme die Kurvenschar der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y^2 \cdot (y')^2 + y^2 - 1 = 0, \quad y = y(x) > 0$$

sowie ihre Enveloppen.

Lösung: Die Gleichung ist äquivalent zu $yy' = \pm\sqrt{1-y^2}$. Somit ist sie separierbar:

$$\begin{aligned} yy' = \pm\sqrt{1-y^2} \quad &\Longrightarrow \quad \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y = \pm \int \mathrm{d}x \\ &\Longleftrightarrow \quad -\sqrt{1-y^2} = \pm x + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow \quad 1 - y^2 = (\pm x + C)^2 = (x \pm C)^2 \\ &\overset{y>0}{\Longleftrightarrow} \quad y(x) = \sqrt{1-(x-K)^2} \end{aligned}$$

wobei $K = \mp C$. Man kann überprüfen, dass die Kurvenschar

$$y = \sqrt{1-(x-K)^2}, \quad K \in \mathbb{R}$$

tatächlich die allgemeine Lösung der originalen Differential gleichung ist. Diese Schar beschreibt alle oberen Halbkreise mit Radius 1 und Mittelpunkt auf der x-Achse (ohne die Punkte auf dieser Achse).

Bitte wenden!

Geometrisch kann man feststellen, das $y = 1$ eine Enveloppe der Kurvenschar und somit eine singuläre Lösung der Differentialgleichung ist. Dies lässt sich auch analytisch zeigen: Wenn man $F(x, y, K) := (x-K)^2 + y^2 - 1$ definiert, müssen die Enveloppen die Gleichungen

$$(x-K)^2 + y^2 = 1 \quad \text{und} \quad F_K(x, y, K) = -2(x-K) = 0$$

erfüllen. Hier müssen wir nun den Scharparameter K eliminieren. Aus der zweiten Gleichung folgt $x = K$ und aus der ersten somit, dass $y = 1$ ist. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung lässt sich überprüfen, dass diese konstante Funktion tatsächlich eine Lösung ist.

7. Betrachten Sie die 3-parametrige Kurvenschar

$$y(x) = C_1 \cosh(C_3 x) + C_2 \sinh(C_3 x)$$

mit den Parametern $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine zugehörige Differentialgleichung.

Lösung: Die Schar

$$y(x) = C_1 \cosh(C_3 x) + C_2 \sinh(C_3 x) \quad (1)$$

hat 3 Parameter. Deshalb wird die zugehörige Differentialgleichung dritter Ordnung sein. Durch Ableitung nach x bekommen wir

$$y' = C_1 C_3 \sinh(C_3 x) + C_2 C_3 \cosh(C_3 x) \quad (2)$$

$$y'' = C_1 C_3^2 \cosh(C_3 x) + C_2 C_3^2 \sinh(C_3 x) \quad (3)$$

$$y''' = C_1 C_3^3 \sinh(C_3 x) + C_2 C_3^3 \cosh(C_3 x) \quad (4).$$

Aus den Gleichungen $(1), (2), (3), (4)$ sind nun die Parameter C_1, C_2, C_3 zu eliminieren. Division von (4) durch (2) liefert

$$\frac{y'''}{y'} = C_3^2.$$

Ferner ergibt sich aus (1) und (3) die Gleichung

$$y'' - C_3^2 y = 0.$$

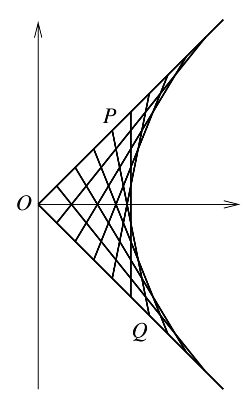
Als Differentialgleichung der Schar erhalten wir somit

$$y' y'' - y''' y = 0.$$

8. Seien P und Q Punkte auf den Winkelhalbierenden des ersten bzw. zweiten Quadranten. Man berechne die Enveloppe der Schar der Geraden $\overline{PQ}$, für die die Summe der Längen

$$PO + QO = 2\sqrt{2}$$

ist. (O ist der Koordinatenursprung.)



Siehe nächstes Blatt!

Lösung: Mit $P = (p, p)$ und $Q = (q, -q)$ ergibt sich aus der Bedingung $PO+QO = 2\sqrt{2} = \sqrt{2}(p+q)$ die Beziehung $q = 2 - p$. Eine Parameterdarstellung der Geraden durch P und Q ist gegeben durch

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q-p \\ -q-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + t(2-2p) \\ p - 2t \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man $t = \frac{p-y}{2}$ und in der ersten Gleichung eingesetzt, ergibt sich

$$x = p + \frac{p-y}{2}(2-2p) \quad \text{oder} \quad 0 = p - x - (p-y)(p-1) =: F(x, y, p).$$

Aus der Enveloppenbedingung $F_p = 1 - (p-1) - (p-y) = 0$ folgt $p = \frac{y+2}{2} = \frac{y}{2} + 1$. Einsetzen dieses Ausdruckes in der Gleichung $F(x, y, p) = 0$ führt zu

$$\frac{y}{2} + 1 - x - (1 - \frac{y}{2})\frac{y}{2} = 0 \quad \text{oder} \quad x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1.$$

Dies ist eine Parabel. Wegen $0 \le p \le 2$ folgt aus $p = \frac{y}{2} + 1$ noch $-2 \le y \le 2$. Die Enveloppe ist also der Parabelbogen

$$x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1 \qquad -2 \le y \le 2.$$

9. Die Differenzialgleichung

$$\left(2x - x^2\right) y'' + \left(x^2 - 2\right) y' + 2\,(1-x)\, y = 0$$

besitzt die Lösung $y_1 : x \longmapsto e^x$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Substitution $y(x) = z(x)e^x$ die allgemeine Lösung.

Lösung: Da $y_1 : x \longmapsto e^x$ eine Lösung von $\left(2x - x^2\right) y'' + \left(x^2 - 2\right) y' + 2\,(1-x)\, y = 0$ und $y_1''(x) = y_1'(x) = y_1(x) = e^x$ ist, gilt

$$\left(2x - x^2\right) e^x + \left(x^2 - 2\right) e^x + 2\,(1-x)\, e^x = 0. \tag{2}$$

Für $y(x) = z(x)\, e^x$ gilt weiter

$$\begin{aligned} y'(x) &= z'(x)\, e^x + z(x)\, e^x \\ y''(x) &= z''(x)\, e^x + 2z'(x)\, e^x + z(x)\, e^x. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Differenzialgleichung ergibt dies

$$\begin{aligned} 0 &= \left(2x - x^2\right)\left(z''e^x + 2z'e^x + ze^x\right) + \left(x^2 - 2\right)\left(z'e^x + ze^x\right) + 2\,(1-x)\, ze^x \\ &= z\big[\underbrace{\left(2x - x^2\right) e^x + \left(x^2 - 2\right) e^x + 2\,(1-x)\, e^x}_{\overset{(2)}{=}0}\big] \\ &\quad + \left(2x - x^2\right)\left(z''e^x + 2z'e^x\right) + \left(x^2 - 2\right) z'e^x \\ &= e^x \left[\left(2x - x^2\right) z'' + \left(2x - x^2\right) 2z' + \left(x^2 - 2\right) z'\right] \\ &= e^x \left[\left(2x - x^2\right) z'' + \left(4x - x^2 - 2\right) z'\right]. \end{aligned}$$

Da $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt

$$\begin{aligned} & \left(2x - x^2\right) z''(x) + \left(4x - x^2 - 2\right) z'(x) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{z''(x)}{z'(x)} = \frac{x^2 - 4x + 2}{2x - x^2} = \frac{x^2 - 2x + 2x - 4x + 2}{2x - x^2} = -1 + \frac{2 - 2x}{2x - x^2}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Integration liefert

$$\ln\left|z'\left(x\right)\right| = -x + \ln\left|2x - x^2\right| + c \ \ , \, c \in \mathbb{R} \Longrightarrow z'\left(x\right) = c_1 e^{-x}\left(2x - x^2\right), \quad c_1 = \pm e^c.$$

Eine weitere Integration liefert

$$\begin{aligned}
z\left(x\right) &= c_1 \int \underbrace{e^{-x}}_{\uparrow} \underbrace{\left(2x - x^2\right)}_{\downarrow} \mathrm{d}x = c_1 \left[-e^{-x}\left(2x - x^2\right) + \int e^{-x}\left(2 - 2x\right)\mathrm{d}x\right] \\
&= c_1 \left[-2xe^{-x} + x^2 e^{-x} + 2\int e^{-x}\mathrm{d}x - 2\int \underbrace{e^{-x}}_{\uparrow} \underbrace{x}_{\downarrow} \mathrm{d}x\right] \\
&= c_1 \Big[-2xe^{-x} + x^2 e^{-x} - 2e^{-x} - 2\big(-e^{-x}x + \underbrace{\int e^{-x}\mathrm{d}x}_{-e^{-x}+K}\big)\Big] \\
&= c_1 \left[-2xe^{-x} + x^2 e^{-x} - 2e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{-x} - 2K\right] \\
&= c_1 x^2 e^{-x} \underbrace{-2c_1 K}_{=:c_2} = c_1 x^2 e^{-x} + c_2,
\end{aligned}$$

wobei $K \in \mathbb{R}$.
Die allgemeine Lösung von $\left(2x - x^2\right) y'' + \left(x^2 - 2\right) y' + 2\left(1 - x\right) y = 0$ ist somit

$$y(x) = z(x)e^x = \left(c_1 x^2 e^{-x} + c_2\right) e^x = c_1 x^2 + c_2 e^x.$$