Lösung - Serie 25

1. Wie lautet die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung $y''' + 2y' + y = 0$?

√ (a) $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$

(b) $\lambda^3 + 2\lambda = 0$

(c) $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

(d) $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

Einsetzen des Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$ liefert die charakteristische Gleichung (oder das charakteristische Polynom) $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$.

Bitte wenden!

2. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$ sind richtig?

√ (a) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 1 - e$.

√ (b) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 0$.

√ (c) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1 - e$ und $y(1) = 0$.

√ (d) Es existiert eine Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ konvergiert für $x \to \infty$.

(e) Es existiert eine Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ konvergiert für $x \to -\infty$.

√ (f) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

√ (g) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -3$.

(h) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$.

√ (i) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2+3\lambda+2 = (\lambda+2)(\lambda+1)$ mit den einfachen Nullstellen -2 und -1, also lautet die allgemeine Lösung $y = Ae^{-2x} + Be^{-x}$ für Konstanten A und B. Dann ist $y(0) = A+B$ und $y(1) = Ae^{-2} + Be^{-1}$. Für beliebige Randwerte $y(0)$ und $y(1)$ sind diese Gleichungen simultan lösbar; somit sind die Aussagen (a) bis (c) richtig. Auch (d) ist richtig, weil es eine Lösung mit diesem Startwert gibt und jede (!) Lösung konvergiert für $x \to \infty$. Dagegen geht jede von Null verschiedene Lösung für $x \to -\infty$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$; deshalb ist (e) falsch.

Aussagen (f) und (i) sind richtig nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz – sogar ohne jede Rechnung. In (h) ist dagegen eine Nebenbedingung zuwenig, und nach demselben Satz existiert zu jedem beliebigen zweiten Startwert $y'(0)$ eine Lösung. Es existieren also unendlich viele solche Lösungen, und deshalb ist die Aussage (h) falsch. In (g) ist zwar eine Nebenbedingung zuviel, und das kann im Allgemeinen dazu führen, dass keine Lösung existiert. Das Beispiel war aber gerade so gewählt, dass es eine gibt, nämlich $e^{-x} - e^{-2x}$, wie man durch Ansatz und Koeffizientenvergleich feststellt, so dass (g) in diesem Fall richtig ist.

Siehe nächstes Blatt!

3. Was kann man über eine Differentialgleichung der Form $y'' + ay' + by = e^x$ mit konstanten Koeffizienten a und b immer sagen?

(a) Ihre Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 2.

Falsch. Die Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Gleichung ist kein Vektorraum, da zum Beispiel die konstante Funktion 0 keine Lösung ist.

(b) Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt αe^x für eine Konstante α.

Falsch. Diese Antwort ist nur dann richtig, wenn $\lambda = 1$ keine Nullstelle des Charakteristischen Polynoms der linken Seite ist, also nicht immer.

(c) Ihre allgemeine Lösung lautet $y_h(x) + \alpha e^x$, wobei y_h die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist und α eine Konstante ist.

Falsch. Diese Antwort ist äquivalent zu (b).

√ (d) Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\, e^x$ für Konstanten $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

Richtig. Diese Aussage ist korrekt, denn die Multiplizität von $\lambda = 1$ als Eigenwert der linken Seite ist stets $\leqq 2$, und daher gibt es immer eine partikuläre Lösung der Gestalt $p(x)e^x$ für ein Polynom $p(x)$ vom Grad $\leqq 2$.

4. Die allgemeine Lösung der Euler'schen Differenzialgleichung

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

ist gleich...

(a) $y(x) = C_1x + C_2x\ln x + C_3x(\ln x)^2$

(b) $y(x) = C_1x + C_2x^2$

(c) $y(x) = C_1x\ln x + C_2(\ln x)^2$

√ (d) $y(x) = C_1x + C_2x\ln x$

Das Indexpolynom

$$\alpha(\alpha - 1) - \alpha + 1 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2$$

hat die doppelte reelle Nullstelle $\alpha = 1$. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist also

$$y(x) = C_1x + C_2x\ln x$$

Bitte wenden!

5. Das Indexpolynom einer (homogenen) Eulerschen Differentialgleichung der Ordnung 4 hat die doppelte komplexe Nullstelle $\alpha = \pm i$. Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

(a) $C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)$

(b) $C_1 \cos(x) + C_2 x \cos(x) + C_3 \sin(x) + C_4 x \sin(x)$

(c) $C_1 + C_2 \cos(\ln x) + C_3 (\ln x) \cos(\ln x) + C_4 \sin(\ln x) + C_5 (\ln x) \sin(\ln x)$

√ (d) $C_1 \cos(\ln x) + C_2 (\ln x) \cos(\ln x) + C_3 \sin(\ln x) + C_4 (\ln x) \sin(\ln x)$

(e) $C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) + C_3$

Die richtige Antwort ist (d). Siehe Skript von Stammbach, Teil C, Kapitel VII.10, Seite 87 für eine Erklärung.

6. **a)** Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$.

b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y'' + 4y' = xe^x, \quad x \in (-\infty, \infty)$$
$$y(0) = y'(0) = 0.$$

c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y''' + y'' + y' + y + x + 1 = 0$ mit $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

Lösung:

a) Die Differenzialgleichung

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-x} \tag{1}$$

ist eine inhomogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir suchen zuerst die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Differenzialgeichung

$$y'' + 2y' + y = 0. \tag{2}$$

Den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, eingesetzt in (2) liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) \\ \Longrightarrow p(\lambda) &:= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ besitzt eine doppelte Nullstelle $\lambda = -1$. Wir erhalten somit die zwei linear unabhängige Lösungen von (2)

$$y_1(x) = e^{-x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = xe^{-x}. \tag{3}$$

Die allgemeine Lösung von (2) ist somit gegeben durch

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \stackrel{(3)}{=} (C_1 + C_2 x) e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir suchen nun eine partikuläre Lösung y_p von (1). Dazu verwenden wir das Verfahren von Lagrange und machen den Ansatz

$$y(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x).$$

$\gamma_1(x)$ und $\gamma_2(x)$ lassen sich durch

$$\begin{aligned}\gamma_1'(x)y_1(x) + \gamma_2'(x)y_2(x) &= 0\\ \gamma_1'(x)y_1'(x) + \gamma_2'(x)y_2'(x) &= q(x),\end{aligned}$$

wobei $q(x)$ die Inhomogenität ist, gewinnen (siehe Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 79–80).

$$\begin{aligned}\gamma_1'(x)e^{-x} + \gamma_2'(x)xe^{-x} &= 0\\ -\gamma_1'(x)e^{-x} + \gamma_2'(x)\left(e^{-x} - xe^{-x}\right) &= 4e^{-x}\\ \Longrightarrow \gamma_2'e^{-x} = 4e^{-x} \quad \Longrightarrow \gamma_2' = 4 \quad \Longrightarrow \gamma_2 &= 4x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}\\ \Longrightarrow \gamma_1' = -4x \quad \Longrightarrow \gamma_1 &= -2x^2 + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung von (1) ist dann gegeben durch

$$y(x) = (-2x^2 + c_1)e^{-x} + (4x + c_2)xe^{-x} = (c_1 + xc_2 + 2x^2)e^{-x}.$$

b) Wir lösen zuerst die homogene Gleichung

$$y'' + 4y' = 0.$$

Das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda$ hat die zwei Nullstellen $\lambda = 0$ und $\lambda = -4$. Daher ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung

$$y_h(x) = C_1 + C_2e^{-4x}$$

für $C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}$.

Um eine partikuläre Lösung zu bestimmen, können wir erneut das Verfahren aus a) anwenden. Mit dem Ansatz

$$y(x) = c_1(x) + c_2(x)e^{-4x},$$

sowie

$$c_1'(x) + c_2'(x)e^{-4x} = 0$$

ergibt sich durch Einsetzen von $y(x)$ in die DGL und Auflösen nach c_1', c_2', dass

$$c_1'(x) = \frac{1}{4}xe^x, c_2'(x) = -\frac{1}{4}xe^{5x}.$$

Durch Integration erhalten wir

$$c_1(x) = \frac{1}{4}(x-1)e^x + C_1, c_2(x) = -\frac{1}{20}\left(x - \frac{1}{5}\right)e^{5x} + C_2.$$

Nach Einsetzen ist unsere allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}y(x) = c_1(x) + c_2(x)e^{-4x} &= \left(\frac{1}{4}(x-1)e^x + C_1\right) + \left(-\frac{1}{20}\left(x - \frac{1}{5}\right)e^{5x} + C_2\right)e^{-4x}\\ &= C_1 + C_2e^{-4x} + \frac{1}{5}xe^x - \frac{6}{25}e^x.\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Aus den Anfangsbedingungen folgt, dass $C_1 = \frac{1}{4}$ und $C_2 = -\frac{1}{100}$ sind. Somit ist die Lösung des Problems:

$$y(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{100}e^{-4x} + \frac{1}{5}xe^x - \frac{6}{25}e^x.$$

c) Das charakteristische Polynom lautet $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = \frac{\alpha^4-1}{\alpha-1}$ und hat die Nullstellen $-1, \pm i$.
Eine partikuläre Lösung ist $y_{\mathrm{p}}(x) = -x$.
Die allgemeine Lösung lautet somit $y(x) = C_1\, e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x$.
Die Anfangsbedingungen geben $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 3$.
Die gesuchte Lösung ist also $y(x) = e^{-x} + 3\sin x - x$.

7. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - (2\alpha - 4)y' + (8 - 4\alpha)y = 0.$$

a) Für welche Werte von α gibt es sowohl Lösungen, die für $x \to \infty$ konvergieren (aber ungleich der konstanten Funktion 0 sind) als auch Lösungen, die für $x \to \infty$ nicht konvergieren?

b) Für welche α gibt es Lösungen y, die für $x \to \infty$ konvergieren mit $\lim_{x\to\infty} y(x) \neq 0$?

Lösung: Die Differenzialgleichung

$$y'' - (2\alpha - 4)\, y' + (8 - 4\alpha)\, y = 0 \tag{5}$$

ist eine homogene lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, liefert ($y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$)

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^2 e^{\lambda x} - (2\alpha - 4)\,\lambda e^{\lambda x} + (8 - 4\alpha)\, e^{\lambda x} \\ &= \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \left[\lambda^2 - (2\alpha - 4)\,\lambda + (8 - 4\alpha)\right]. \\ \Longrightarrow p(\lambda) &:= \lambda^2 - (2\alpha - 4)\,\lambda + (8 - 4\alpha) = 0 \end{aligned}$$

Wir berechnen die Nullstellen von $p(\lambda)$ (charakteristisches Polynom von (5))

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2\alpha - 4 + \sqrt{(2\alpha-4)^2 - 4(8-4\alpha)}}{2} = \alpha - 2 + \sqrt{\alpha^2 - 4} \quad \text{und} \\ \lambda_2 &= \frac{2\alpha - 4 - \sqrt{(2\alpha-4)^2 - 4(8-4\alpha)}}{2} = \alpha - 2 - \sqrt{\alpha^2 - 4}. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden folgende Fälle.
<u>$\alpha > 2$</u>:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha - 2 + \sqrt{\alpha^2 - 4} > 2 - 2 + \sqrt{\alpha^2 - 4} = \sqrt{\alpha^2 - 4} > 0 \\ \lambda_2 &< 0, \quad \text{da} \quad \lambda_2 = \alpha - 2 - \sqrt{\alpha^2 - 4} < 0 \Longleftrightarrow 0 < \alpha - 2 < \sqrt{\alpha^2 - 4} \\ &\Longleftrightarrow (\alpha - 2)^2 < \left(\sqrt{\alpha^2 - 4}\right)^2 \Longleftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 < \alpha^2 - 4 \\ &\Longleftrightarrow -4\alpha < -8 \Longleftrightarrow \alpha > 2 \end{aligned}$$

Zusammenfassend: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (insbesondere ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Somit sind alle Lösungen von der Form (oder Linearkombinationen dieser Formen)

$$\begin{aligned} &ae^{\lambda_1 x} \to \pm\infty \text{ oder } 0 \ \ (x \to \infty)\,,\ a \in \mathbb{R} \text{ (je nachdem, ob } a > 0, < 0 \text{ oder } = 0 \text{ ist)} \\ &be^{\lambda_2 x} \to 0 \ \ (x \to \infty)\,,\ b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\underline{\alpha = 2}$:
Es ist $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$. Alle Lösungen sind von der Form (oder Linearkombinationen dieser Formen)

$$\begin{aligned} ae^{\lambda_1 x} &= a \ \ \text{(insbesondere konvergent für } x \to \infty)\,,\ a \in \mathbb{R} \\ bxe^{\lambda_2 x} &= bx \to \pm\infty \text{ oder } 0 \ \ (x \to \infty)\,,\ b \in \mathbb{R} \text{ (je nachdem, ob } b > 0, < 0 \text{ oder } = 0 \text{ ist).} \end{aligned}$$

$\underline{-2 < \alpha < 2}$:
Es gilt $\alpha^2 - 4 < 0$. Es folgt, dass $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Re}\,(\lambda_1), \mathrm{Re}\,(\lambda_2) < 0$ (da $\alpha - 2 < 0$). Alle Lösungen sind von der Form (oder Linearkombinationen dieser Formen)

$$\begin{aligned} a\, e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)x}\, e^{i\mathrm{Im}(\lambda_1)x} \to 0 \ \ (x \to \infty)\,,\ a \in \mathbb{R} \\ b\, e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)x}\, e^{-i\mathrm{Im}(\lambda_1)x} \to 0 \ \ (x \to \infty)\,,\ b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\underline{\alpha \leq -2}$:
Es gilt

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \underbrace{\alpha - 2}_{<0} - \sqrt{\underbrace{\alpha^2 - 4}_{\geq 0}} < 0 \\ \lambda_1 &= \alpha - 2 + \sqrt{\alpha^2 - 4} < \alpha - 2 + \sqrt{\alpha^2 + 4} < \alpha - 2 + \sqrt{\alpha^2 \underbrace{-4\alpha}_{>0} + 4} \\ &= \alpha - 2 + \sqrt{(\alpha - 2)^2} = \alpha - 2 + |\underbrace{\alpha - 2}_{\leq 0}| = \alpha - 2 - (\alpha - 2) = 0. \end{aligned}$$

Zusammenfassend: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, d.h. wir haben exponentielles Abklingen, somit gehen alle Lösungen gegen 0 für $x \to \infty$.
Die Antworten lauten somit

a) $\alpha \geq 2$.

b) $\alpha = 2$.

8. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$r^2 u''(r) = -ru'(r) + u(r) + 2r, \quad \text{wobei} \quad r > 0.$$

a) Finden Sie die Lösung $u(r)$ mit $u(1) = 0$ und $u'(1) = 0$.

b) Finden Sie all diejenigen Lösungen $u(r)$, welche für $r \to 0$ konvergieren.

Lösung:

a) Um die homogene Lösung dieser Eulerschen DGL zu finden, machen wir den Ansatz $u(r) = r^\alpha$. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die DGL erhalten wir das Indexpolynom

$$\begin{aligned} 0 &= r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - r^\alpha \\ 0 &= \alpha^2 - \alpha + \alpha - 1. \\ \Longrightarrow \alpha &= \pm 1 \end{aligned}$$

Die homogene Lösung ist somit $u_h(r) = C_1 r + C_2 r^{-1}$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Für die partikuläre Lösung machen wir einen Ansatz mit Variation der Konstanten, dh.

$$u_p(r) = C_1(r)r + C_2(r)r^{-1}.$$

Wie in Stammbach, Teil C, Kapitel 9 (b) fordern wir zusätzlich zur ursprünglichen Differentialgleichung noch

$$C_1'(r)r + C_2'(r)r^{-1} = 0. \tag{6}$$

Unter Verwendung dieser Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} u_p' &= C_1'r + C_1 + C_2'r^{-1} - C_2r^{-2} = C_1 - C_2r^{-2}, \\ u_p'' &= C_1' - C_2'r^{-2} + 2C_2r^{-3}. \end{aligned}$$

Setzt man in die ursprüngliche Differentialgleichung (geteilt durch r^2) ein, erhält man

$$\begin{aligned} &C_1' - C_2'r^{-2} + 2C_2r^{-3} + C_1r^{-1} - C_2r^{-3} - C_1r^{-1} - C_2r^{-3} \\ =&C_1' - C_2'r^{-2} = \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man Gleichung (6) ergibt sich das Gleichungssystem

$$C_1'r + C_2'r^{-1} = 0, C_1' - C_2'r^{-2} = \frac{2}{r}.$$

Multiplizieren der zweiten Gleichung mit r und subtrahieren der ersten ergibt

$$-C_2'\frac{2}{r} = 2 \iff C_2' = -r.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung gibt $C_1' = 2/r + C_2'/r^2 = 1/r$. Durch Integration erhalten wir

$$C_1(r) = \ln(r) + C_{1,0}, C_2(r) = -\frac{1}{2}r^2 + C_{2,0}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$u(r) = (\ln(r) + C_{1,0})r + (-\frac{1}{2}r^2 + C_{2,0})\frac{1}{r}.$$

Die Bedingungen $u(1) = 0, u'(1) = 0$ sind erfüllt für

$$C_{1,0} - \frac{1}{2} + C_{2,0} = 0, C_{1,0} - (-\frac{1}{2} + C_{2,0}) = 0,$$

also $C_{1,0} = 0, C_{2,0} = 1/2$. Also folgt für die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(r) = \ln(r)r - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2r}.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Aus a) sieht man, dass die allgemeine Lösung der DGL geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} u(r) &= (\ln(r) + C_{1,0})r + (-\frac{1}{2}r^2 + C_{2,0})\frac{1}{r} \\ &= C_1 r + C_2 r^{-1} + \ln(r)r, \end{aligned}$$

für $C_1 = C_{1,0} - \frac{1}{2}$, $C_2 = C_{2,0}$. Da $(\ln(r)r) \to 0$ für $r \to 0$, konvergiert diese Lösung für $r \to 0$ genau dann wenn $C_2 = 0$. D.h. die gesuchten Lösungen sind gegeben durch

$$u(r) = C_1 r + \ln(r)r \quad \text{mit } C_1 \in \mathbb{R}.$$

9. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1, \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

für die Funktion $y = y(x)$, $x > 0$.

Hinweis: Für die partikuläre Lösung können Sie den Ansatz $y_p(x) = A + Bx + Cx^2$ wählen.

Lösung: Es handelt sich um eine inhomogene Eulersche Differentialgleichung zweiten Grades. Für die zugehörige homogene Gleichung benutzen wir den Ansatz $y(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessen Ableitungen sind $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ und $y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$; und Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}) - \frac{1}{x}(\alpha x^{\alpha-1}) + \frac{1}{x^2}x^\alpha \\ &= \Big(\alpha(\alpha-1) - \alpha + 1\Big)x^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Da $x > 0$ nach Voraussetzung, können wir mit $x^{\alpha-2} \neq 0$ kürzen und erhalten das Indexpolynom

$$0 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2$$

mit der doppelten Nullstelle $\alpha = 1$. Deshalb lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = C_1 x + C_2 x \ln x$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. (Durch Einsetzen in die DGL kann man das Resultat prüfen.)

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung versuchen wir einen quadratischen polynomiellen Ansatz

$$y_p(x) = A + Bx + Cx^2, \qquad \text{mit } A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in die ursprüngliche DGL ergibt

$$\begin{aligned} x^2 &= x^2 \cdot 2C - x \cdot (B + 2Cx) + (A + Bx + Cx^2) \\ &= x^2 \cdot C + A. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $C = 1$ und $A = 0$. Der Wert von B ist egal, und da wir nur eine partikuläre Lösung suchen, setzen wir der Einfachheit halber $B = 0$. Wir erhalten also $y_p(x) = x^2$. (Durch Einsetzen in die DGL kann man prüfen, dass y_p eine Lösung ist.)

Die allgemeine Lösung ist die Summe der homogenen Lösung und einer partikulären Lösung, also

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 x + C_2 x \ln x + x^2.$$

Bitte wenden!

Aus den Anfangsbedingungen $0 = y(1) = 1 + C_1$ und $0 = y'(1) = 2 + C_1 + C_2$ ergibt sich $C_1 = -1$ und $C_2 = -2 - C_1 = -1$. Also lautet die gesuchte Lösung unseres Anfangswertproblems

$$y(x) = x^2 - x - x \ln x.$$

Bemerkung: Alternativ zum quadratischen Ansatz kann man auch hier wieder die Variation der Konstanten wie in der vorigen Aufgabe durchführen und erhält das gleiche Ergebnis.