Serie 16

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis **Mittwoch, 21.03.2018 um 12.00 Uhr** ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Mittwoch, 21.03.2018 in der Schnellübung.

Homepage: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-0262-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Die Koordinatentransformation

$$x(u,v) = 2v,$$
$$y(u,v) = -2u$$

bildet Kreise auf Kreise ab.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

2. Betrachten Sie das Integral

$$I = \int_0^1 \int_0^x x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

Welche der folgenden Integrale sind gleich I?

(a) $\int_0^1 \int_0^y y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

(b) $\int_0^1 \int_0^y x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

(c) $\int_0^1 \int_y^1 x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

Bitte wenden!

3. Es sei B ein Bereich in der (x, y)-Ebene und $\widetilde{B}$ der via Polarkoordinaten entsprechende Bereich in der (ϱ, φ)-Ebene. Welchem Integral entspricht $\int_B xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$?

(a) $\displaystyle\int_{\widetilde{B}} \varrho^2 \sin\varphi \cos\varphi \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\varphi$

(b) $\displaystyle\int_{\widetilde{B}} \varrho^3 \sin\varphi \cos\varphi \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\varphi$

(c) $\displaystyle\int_{\widetilde{B}} \varrho^3 \sin\varphi \cos^2\varphi \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\varphi$

4. Es sei

$$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}F,$$

wobei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ bezeichne. Je nach Wahl des Koordinatensystems und der Reihenfolge der Integration lässt sich I auf verschiedene Arten als zweifaches Integral ausdrücken. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $I = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

(b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi$

(c) $I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Übungsaufgaben

5. Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x(u,v) &= 2u+v, \\ y(u,v) &= \ \ u-3v. \end{aligned}$$

a) Es bezeichne $\mathcal{R}$ das Einheitsquadrat in der xy-Ebene, also $\mathcal{R} = [0,1]\times[0,1]$. Skizzieren Sie den Bereich $\widetilde{\mathcal{R}}$ der uv-Ebene, der unter dieser Transformation entsteht.

b) Berechnen Sie die Einträge und die Determinante der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

c) Vergleichen Sie das Resultat aus (b) mit dem Verhältnis der Flächen von $\mathcal{R}$ und $\widetilde{\mathcal{R}}$.

6. Betrachten Sie den Laplace-Operator

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

für zweimal differenzierbare Funktionen $f\colon (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ in drei Variablen.

a) Berechnen Sie Δf für $f(x,y,z) = x^2y + 2xz^{-1} + \sin(xz)$.

b) Welche Form hat dieser Laplace-Operator in zylindrischen Koordinaten, das heisst, nach der Koordinatentransformation

$$x(\varrho,\varphi,z) = \varrho\cos(\varphi), \quad y(\varrho,\varphi,z) = \varrho\sin(\varphi), \quad z(\varrho,\varphi,z) = z,$$

wobei $\varrho > 0$, $\varphi \in [0,2\pi)$ und $z \in \mathbb{R}$ sind? Beschränken Sie sich hierzu auf $x > 0$ und $y > 0$, da ansonsten unnötige Komplikationen bei der Berechnung des Arkustangens auftreten. Anleitung: Hierzu definieren Sie zunächst die Funktion $\widetilde{f}\colon (0,\infty)\times[0,2\pi)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\widetilde{f}(\varrho,\phi,z) = f\left(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z\right).$$

Bitte wenden!

(Diese Funktion erlaubt uns, nun direkt die Variablen ϱ, φ und z einzusetzen.) Dann berechnen Sie die Umkehrungen $\varrho(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ und verwenden schliesslich die verallgemeinerte Kettenregel.

c) Berechnen Sie, unter Zuhilfenahme von Teil (b), Δf für

$$f(x, y, z) = \frac{1}{z} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - 2z\sqrt{x^2 + y^2}$$

und $x, y, z > 0$.

7. **a)** Berechnen Sie

$$\iint_D x^2 y^2 \, \mathrm{d}F,$$

wobei D das durch die Kurven $y = x^2$ und $y = 1$ eingeschlossene Gebiet bezeichnet.

b) Berechnen Sie

$$\iint_D x e^{x+y} \, \mathrm{d}F,$$

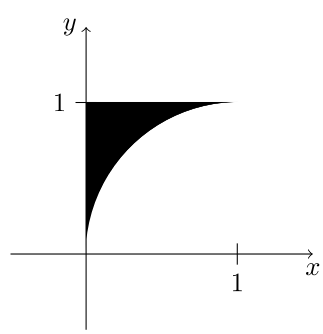
wobei $D = [0, 1] \times [0, 1]$ das Einheitsquadrat bezeichnet.

c) Berechnen Sie

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}F,$$

wobei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ den Einheitskreis bezeichnet.

8. Sei $S = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : (x - 1)^2 + y^2 \geq 1\}$.



Berechne den Schwerpunkt von S.