Multiple Choice. *Die folgenden acht Aufgaben sind Multiple Choice-Aufgaben. Bei jeder Aufgabe gibt es 4 Aussagen, die wahr oder falsch sind. Für 4 korrekte Antworten gibt es 4 Punkte, für 3 korrekte Antworten gibt es 2 Punkte, in allen anderen Fällen gibt es 0 Punkte. Insbesondere lohnt es sich zu raten!*

1. (Fibonacci) Es sei $(f_n)_{n\geq 0}$ die Fibonacci Folge, gegeben durch

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1},\ \text{wobei } n \geq 1.$$

Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

(a) Die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ ist monoton wachsend.

(b) Die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ ist beschränkt.

(c) Falls der Grenzwert $\lim_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$ existiert, dann existiert der Grenzwert $\lim_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}^2}{f_n^2}$ ebenfalls.

(d) Die Folge $\left(\frac{f_{n+2}-f_{n+1}}{f_n^2}\right)_{n\geq 0}$ ist eine Nullfolge.

2. (Extremalwerte) Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie für *alle* nichtkonstanten Polynome fünften Grades $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelten *muss*.

(a) p hat mindestens eine reelle Nullstelle.

(b) p hat mindestens einen Sattelpunkt.

(c) p hat mindestens eine lokale Extremalstelle.

(d) Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, so dass $p(z) = 0$, dann gilt ebenfalls $p(\overline{z}) = 0$.

3. (Funktionen) Es sei die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \exp(-x^2/2) \end{aligned}$$

gegeben. Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

(a) Die Funktion f ist injektiv.

(b) Die Funktion f ist gerade.

(c) Die Funktion f ist stetig.

(d) Es gilt $\ln(f(x)) \leq 0$ für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$.

4. (Grössenordnungen von Funktionen) Es sei die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^3 + x \end{aligned}$$

gegeben. Welche der folgenden Grössenordnungen gelten, wenn $x \to +\infty$?

(a) $\cos(x) = o(f(x))$.
(b) $\cosh(x) = o(f(x))$.
(c) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x = o(f(x))$.
(d) $\ln(x)\ln(e^x - x)\ln(e^{x^2} - x^2) = o(f(x))$.

Hinweis: Beachten Sie
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

5. (Krümmung) Wir betrachten die Ellipse E gegeben durch die folgende Parameterdarstellung
$$\vec{\gamma}(t) = (7\cos(t), 5\sin(t)), \quad \text{wobei } 0 \le t \le 2\pi.$$

Es sei κ_m die minimale Krümmung von $\vec{\gamma}(t)$. Bestimmen Sie bei folgenden Aussagen jeweils, ob sie falsch oder wahr ist.

(a) Die Krümmung ist minimal für $t = \pi$.
(b) $\kappa_m = \frac{1}{5}$.
(c) Die Krümmung $\kappa(t)$ erfüllt $\kappa(t + \frac{\pi}{2}) = \kappa(t)$ für $t \in [0, \frac{3}{2}\pi]$.
(d) Die Krümmung ist überall negativ.

Hinweis: Die Krümmung einer Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, wobei $t \in [a, b]$, ist gegeben durch
$$\kappa(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

6. (Rotationsvolumen Theorie) Wir bezeichnen für $i = 1, 2$ mit K_i den Rotationskörper, der durch Rotation einer positiven stetigen Funktion $f_i\colon [0,1] \to (0, \infty)$ an der x-Achse entsteht. Es sei $V_i := \pi \int_0^1 f_i(x)^2\, dx$ das Volumen des Rotationskörpers K_i. Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

(a) Falls $\int\limits_0^1 f_1(x)\, dx = \int\limits_0^1 f_2(x)\, dx$, dann haben K_1 und K_2 dasselbe Volumen.
(b) Falls $f_1(t) \le f_2(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt, dann ist $V_1 \le V_2$.
(c) Falls $f_1(t) = at$, wobei $a > 0$, dann ist $V_1 = \frac{\pi a^3}{3}$.
(d) Der Rotationskörper der Funktion $f_1(x) \cdot f_2(x)$ hat Volumen $V_1 \cdot V_2$.

7. (Zwischenwertsatz) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *stetige* Funktion mit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist

(a) Es gibt eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = x$.

(b) Es gibt eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = -x$.

(c) Es gibt eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = 0$.

(d) Es gibt eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$, so dass $f(-2x) = -2$.

8. (Konvergenz von Reihen) Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Reihen, ob sie konvergent ist.

(a) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert.

(b) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert.

(c) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\frac{1}{2^n}$ konvergiert.

(d) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^n}$ konvergiert.

Single Choice. *Die folgenden achtzehn Aufgaben sind Single Choice-Aufgaben, d.h. genau eine der Antwortmöglichkeiten stimmt. Für jede richtige Antwort gibt es 2 Punkte, für eine falsche Antwort oder keine Antwort* 0 *Punkte. Schliessen Sie falsche Antworten aus und raten Sie, wo Sie nicht sicher sind!*

9. (Bogenlänge) Ein Teilstück der Klothoide sei durch die Parameterdarstellung $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ mit

$$x(t) = \int_0^t \cos(\tau^2)\, d\tau, \quad y(t) = \int_0^t \sin(\tau^2)\, d\tau, \qquad \text{wobei } 0 \le t \le 2018.$$

gegeben. Die Bogenlänge der Kurve γ ist gegeben durch

(a)
$$\int_0^{2018} \sqrt{\sin(\tau^2) + \cos(\tau^2)}\, d\tau.$$

(b)
$$\int_0^{2018} \sqrt{2\tau \sin(\tau)^2 + 2\tau \cos(\tau)^2}\, d\tau.$$

(c)
$$\int_0^{2018} \sqrt{\sin(\tau^2)^2 + \cos(\tau^2)^2}\, d\tau.$$

(d)
$$\int_0^{2018} \sqrt{4\sin(\tau^2)^2 + 4\cos(\tau^2)^2}\, d\tau.$$

Hinweis: Die Bogenlänge einer Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, wobei $t \in [a, b]$, ist gegeben durch

$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$$

10. (Grenzwerte) In welchem der folgenden Intervalle liegt der Grenzwert

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} \sin(2\pi/x)?$$

(a) $(-\infty, 2)$.

(b) $[2, 6]$.

(c) $(6, +\infty)$.

(d) Der Grenzwert existiert nicht.

11. (Volumenberechnung) Gabriels Horn ist der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den Graphen der Funktion

$$x \mapsto \frac{1}{x}, \qquad \text{wobei } x \geq 1$$

in einem dreidimensionalen Koordinatensystem um die x-Achse rotiert. Wie gross ist das Volumen V von Gabriels Horn?

(a) $V = \pi$.

(b) $V = 2\pi$.

(c) $V = \frac{\pi}{2}$.

(d) $V = +\infty$.

Hinweis: Das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation des Graphen der Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ um die x-Achse entsteht, ist gegeben durch:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x$$

12. (Oberflächenberechnung) Die ebene Kurve

$$x(t) = \int_0^t \sqrt{2 - e^{-2s}}\, ds, \quad y(t) = e^{-t}, \qquad \text{wobei } t \in [0, +\infty)$$

wird um die x-Achse rotiert. Wie gross ist die Mantelfläche M des dabei entstehenden Rotationskörpers?

(a) $M = 2\pi$.

(b) $M = 2\sqrt{2}\pi$.

(c) $M = +\infty$.

(d) $M = \pi$.

Hinweis: Die Mantelfläche des Rotationskörpers, der durch die Rotation des Graphen der parametrisiertem Kurve $[t_A, t_B] \mapsto (x(t), y(t))$ entsteht, ist gegeben durch:

$$M = 2\pi \int_{t_A}^{t_B} y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\mathrm{d}t$$

13. (Polarkoordinaten) Die *Zissoide des Diokles* ist in Parameterform gegeben durch

$$x(t) = \frac{2t^2}{1+t^2},\ y(t) = \frac{2t^3}{1+t^2} \quad \text{wobei } t \in \mathbb{R},$$

beschrieben werden. Welcher der folgenden Ausdrücke entspricht der Zissoide des Diokles in Polarkoordinaten?

(a) $r = 2\sin(\phi)\tan(\phi)$ mit $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$.

(b) $r = 2\cos(\phi)\tan(\phi)$ mit $-\pi < \phi < \pi$.

(c) $r = \frac{2}{\cos(\phi)}$ mit $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$.

(d) $r = 2\tan(\phi)$ mit $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$.

Hinweis: Beachten Sie

$$x(t) \cdot t = y(t) \text{ und } \sin(\phi)^2 = \frac{\tan(\phi)^2}{1+\tan(\phi)^2}.$$

14. (Taylorreihe) Was ist der Koeffizient a_2 der Taylorreihe der Funktion

$$\begin{aligned} f\colon (-1,1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$?

(a) $a_2 = 1$.

(b) $a_2 = -1$.

(c) $a_2 = 0$.

(d) $a_2 = 2$.

15. (Asymptoten) Welche der folgenden Funktionen ist eine Asymptote für $x \to +\infty$ der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 5}{5x - 5}, \text{ wobei } x > 1?$$

(a) $x \mapsto x^2$.

(b) $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, wobei $x > 1$.

(c) $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{1-x}$, wobei $x > 1$.

(d) $x \mapsto \frac{1}{5}x^2$.

16. (Integrieren) Berechnen Sie folgendes Integral

$$\int_0^1 x \arctan(x)\, dx.$$

(a) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.
(b) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.
(c) $\frac{\pi}{4}$.
(d) $\frac{\pi}{2}$.

Hinweis: Beachten Sie

$$\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

17. (zweite Ableitung) Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto 2\sinh(x)\cosh(x).$$

Welche der folgenden Funktionen entspricht $f''\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(a) $f''(x) = 4\sinh(x)$.
(b) $f''(x) = 4\sinh(2x)$.
(c) $f''(x) = 4\cosh(2x)$.
(d) $f''(x) = 4\cosh(x)$.

Hinweis: Beachten Sie

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \text{ und } \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

18. (Differentialquotient) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Zahl. Welche der folgenden Identitäten ist *immer* richtig?

(a) $f''(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}$.
(b) $f''(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}$.
(c) $f''(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0-h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}$.
(d) $f''(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2f(x_0) - f(x_0+h) + f(x_0-h)}{h^2}$.

Hinweis: Lösen Sie die Gleichungen

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + \cdots$$
$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} - \cdots.$$

nach $f''(x_0)$ auf.

19. (Inverse Funktion) Es sei f die injektive Funktion mit Definitionsbereich $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$ und Funktionsvorschrift
$$f(x) = \frac{1}{1 + ae^x} \text{ mit } a > 0.$$
Was ist der Definitionsbereich $\mathrm{D}(g)$ der Umkehrfunktion g von f?

    (a) $\mathrm{D}(g) = (0, \infty)$.
    (b) $\mathrm{D}(g) = \mathbb{R}$.
    (c) $\mathrm{D}(g) = (0, 1)$.
    (d) $\mathrm{D}(g) = [0, 1]$.

20. (Komplexe Zahlen I) Es sei die komplexe Zahl $z = (1 + i)$ gegeben. Dann ist z^6 gleich

    (a) $-6i$.
    (b) $6i$.
    (c) $-8i$.
    (d) $8i$.

21. (Komplexe Zahlen II) Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung $z^5 = ia$, wobei $a > 1$. Welche der folgenden komplexen Zahlen ist ebenfalls eine Lösung der Gleichung $z^5 = ia$?

    (a) $\overline{z_0}$.
    (b) $-\overline{z_0}$.
    (c) $z_0 \exp\left(i\frac{\pi}{5}\right)$.
    (d) $\sqrt[5]{a} z_0$.

22. (Potenzreihen) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Potenzreihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(2x + \frac{1}{2}\right)^k.$$

    (a) $\left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right]$.
    (b) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
    (c) $\left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.
    (d) $\mathbb{R}$.

23. (Flächenberechnung) Was ist die richtige Formel für das Volumen eines Rotationsellipsoiden, der durch Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$

um die x-Achse entsteht?

(a) $\frac{4\pi}{3}ab$.

(b) $\frac{4\pi}{3}ab^2$.

(c) $\frac{4\pi}{3}a^2b$.

(d) $\frac{4\pi}{3}a^2b^2$.

Hinweis: Das Volumen V eines Ellipsoides mit Halbachsen u, v, w ist gegeben durch

$$V = \frac{4\pi}{3}uvw.$$

24. (Flächenträgheitsmoment) Es bezeichne K die Kreisscheibe in der x, y-Ebene mit Radius 1 und Scheibenmittelpunkt im Koordinatenursprung. Bezüglich welcher der folgenden Achsen hat K das grösste Flächenträgheitsmoment?

(a) Bezüglich der x-Achse.

(b) Bezüglich der z-Achse.

(c) Bezüglich der ersten Winkelhalbierenden in der x, z-Ebene.

(d) Bezüglich der ersten Winkelhalbierenden in der x, y-Ebene.

25. (Koordinatentransformation) Gegeben sei die Parabel $p(x) = x^2 + 2x + 1$, wobei $x \in \mathbb{R}$, mit Scheitelpunkt bei $(-1, 0)$. Welche der folgenden Funktionen entspricht der Parabel q, die entsteht wenn man die Parabel p um 2 Einheiten nach rechts (d.h in positiver x-Richtung) verschiebt und anschliessend mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung staucht?

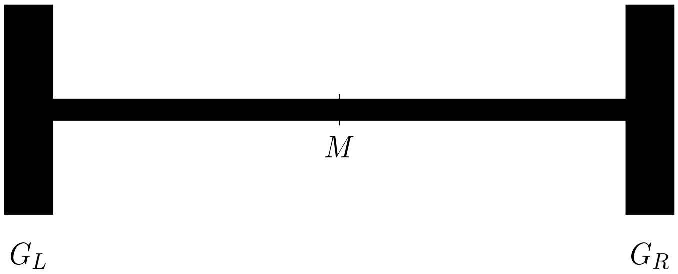
(a) $q(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$.

(b) $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

(c) $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$.

(d) $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$.

26. (Schwerpunkt) Gegeben sei folgende Hantel H



bestehend aus einem Gewicht G_L mit Masse 1, einem Gewicht G_R mit Masse 2 und einer homogenen Hantelstange mit Masse 1. Die Gewichte G_L und G_R sind am linken bzw. rechten Stangenende angebracht und ihre Schwerpunkte befinden sich jeweils in Abstand 1 zum Stangenmittelpunkt M. Wo befindet sich der Schwerpunkt S dieser Hantel?

(a) Im Stangenmittelpunkt, d.h. $M = S$.

(b) Im Abstand 1/4 rechts von M.

(c) Im Abstand 1/3 rechts von M.

(d) Im Abstand 1/2 rechts von M.