Offene Aufgaben. *Jeder der folgenden sieben offenen Aufgaben ist eine einzelne thematisch verwandte Single Choice-Aufgabe vorangestellt. Beantworten Sie die Single Choice Aufgabe auf dem Antwortzettel. Jede offene Aufgabe ist 22 Punkte wert.*

1. **Single Choice.** Es sei

$$K_R := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$$

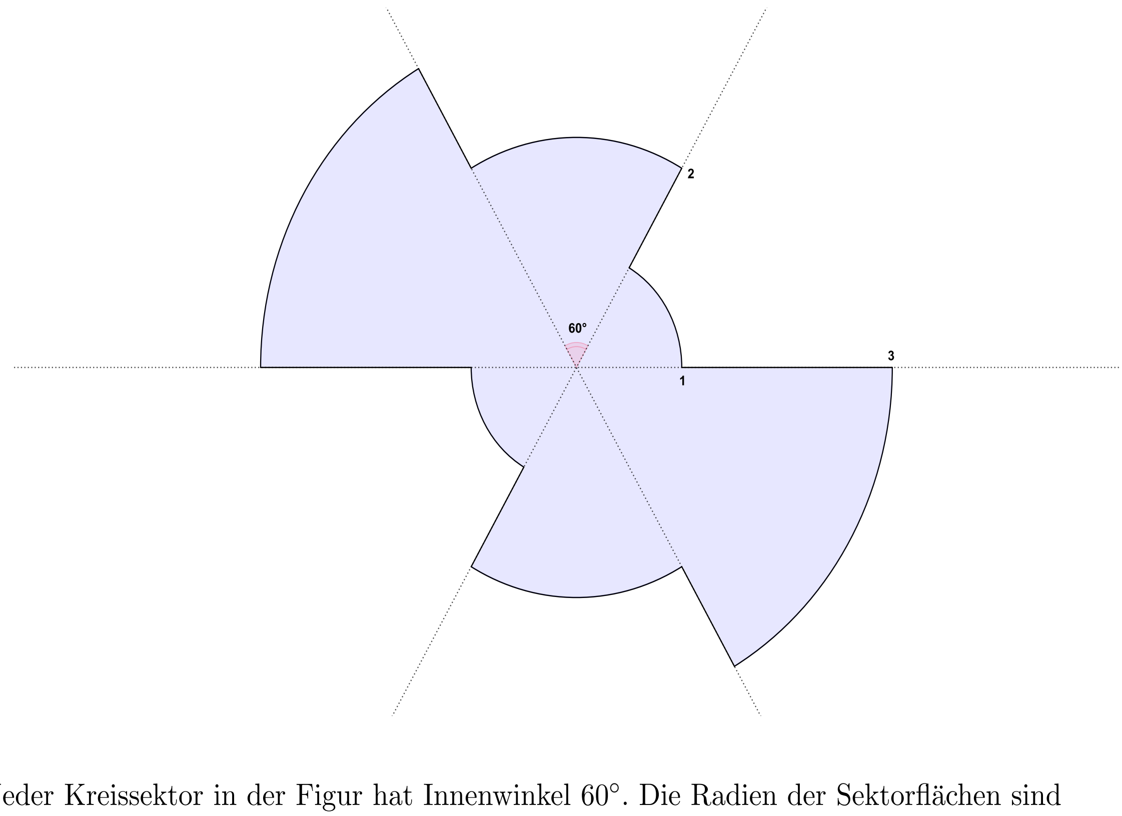
eine Kreisscheibe mit Radius $R > 0$ und es sei J_0 das polare Flächenträgheitsmoment (d.h. bezüglich der z-Achse) der Kreisscheibe K_R bezüglich des Koordinatenursprungs. Wie gross ist das polare Flächenträgheitsmoment der Kreisscheibe $K_{2R} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq (2R)^2\right\}$ bezüglich des Koordinatenursprungs?

(a) $16J_0$

(b) $2J_0$

(c) $4J_0$

Offene Aufgabe. Es bezeichne F die untenstehende schraffierte Fläche



Jeder Kreissektor in der Figur hat Innenwinkel 60°. Die Radien der Sektorflächen sind 1, 2 beziehungsweise 3.

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von F.

(b) Berechnen Sie den Umfang von F.

(c) Berechnen Sie das polare Flächenträgheitsmoment J_0 der Fläche F bezüglich des Koordinatenursprungs.

2. **Single Choice.** Welcher der folgenden Graphen zeigt eine Kurve (in blau) und die zugehörige Evolute (in rot)?

(a) Abbildung (2) und Abbildung (3)

(b) Abbildung (3) und Abbildung (1)

(c) Abbildung (1) und Abbildung (2)

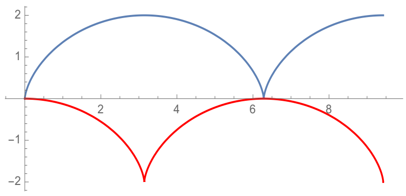


Abbildung 1

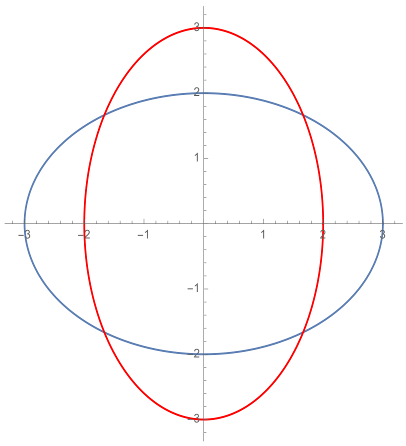


Abbildung 2

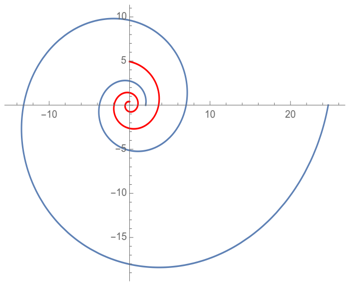


Abbildung 3

Offene Aufgabe.

(a) Betrachten Sie die ebene Kurve K in $\mathbb{R}^2$, implizit definiert durch

$$x^4 - y^2 = 1.$$

Bestimmen Sie die Krümmung von K im Punkt $(x, y) = (1, 0)$.

(b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$y = \log\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$$

von $x = 0$ bis $x = \pi/3$.

(c) Bestimmen Sie die Enveloppe der Kurvenschar

$$y = cx + c^2 + 3 \quad \text{für } c \in \mathbb{R}.$$

3. **Single Choice.** Betrachten Sie ein lineares autonomes System von Differentialgleichungen der Form

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x},$$

wobei A eine reelle 2×2 Matrix ist. Angenommen, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind von der Form $a \pm ib$, wobei $a < 0$ ist. Welche der folgenden Antworten beschreibt das Stabilitätsverhalten des Gleichgewichtspunkts $\vec{0}$?

(a) Stabil.

(b) Instabil.

(c) Asymptotisch stabil.

Offene Aufgabe.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Systems von Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 4y \end{cases}$$

(b) Angenommen, die allgemeine Lösung eines linearen autonomen Systems zweier Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist durch

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$$
$$y(t) = 4C_1 e^t - 3C_2 e^{-t}$$

gegeben. Bestimmten Sie jene spezielle Lösung $(x(t), y(t))$, für die $x(0) = 3$ und $y(0) = -2$ gilt.

(c) Es seien $x(t), y(t)$ definiert wie in Teilaufgabe b) mit $C_1 = 1$ und $C_2 = 1$. Bestimmen Sie die Tangente der ebenen Kurve $(x(t), y(t))$ an der Stelle $t = 2$.

4. **Single Choice.** Es sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch $\vec{v}(x,y,z) = (x, y^2, z^3)$. Wie gross ist der Fluss des Vektorfelds $\vec{v}$ in positiver x-Richtung durch die Kreisscheibe

$$x = 1,\, y^2 + z^2 \leq 1?$$

(a) 0

(b) > 0

(c) < 0

Offene Aufgabe. Das Hyperboloid H sei gegeben durch

$$x^2 - 4y^2 - z^2 = 1.$$

Weiter sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch $\vec{v}(x,y,z) = (x - \cosh 1, z^3, y)$.

(a) Berechnen Sie das Volumen des Körpers S, der von H und der Fläche $x = \cosh(1)$ eingeschlossen wird.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{v}$.

(c) Es sei ∂S die berandende Fläche von S. Auf ∂S sei der *äussere* Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ ausgezeichnet. Berechnen Sie das Flussintegral

$$\Phi = \iint_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dO.$$

5. **Single Choice.** Die Funktion $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = xy(x-1)(y-1).$$

Wo liegt das globale Maximum von f?

(a) Am Rand des Einheitsquadrats, aber nicht auf einer der beiden Koordinatenachsen.

(b) Auf einer der beiden Koordinatenachsen.

(c) Im Innern des Einheitsquadrats.

Hinweis: f_x und f_y müssen nicht berechnet werden um die Single Choice Aufgabe zu lösen.

Offene Aufgabe. Die Funktion f werde durch

$$f(x,y) = \exp(x^3 - 2x^2 - 2y^2 + 2y)$$

für $x, y \in \mathbb{R}$ definiert.

(a) Es gilt $f_x(4/3, 1/2) = f_y(4/3, 1/2) = 0$. Bestimmen Sie, ob $(4/3, 1/2)$ eine lokale Maximalstelle, lokale Minimalstelle oder ein Sattelpunkt ist.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Maximalstellen und die zugehörigen Werte von f im Gebiet $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\big\}$.

(c) Bestimmen Sie alle lokalen Maximalstellen und die zugehörigen Werte der Funktion

$$\widehat{f}\colon \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\big\} \to \mathbb{R},$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \exp(x^3 - 2x^2 - 2y^2 + 2y).$$

6. **Single Choice.** Wir betrachten eine homogene Eulersche Differentialgleichung 6. Ordnung, deren allgemeine Lösung durch

$$\begin{aligned} &C_1 x^3 \cos(\log(x)) + C_2 x^3 \sin(\log(x)) \\ &\qquad + C_3 \log(x) x^3 \cos(\log(x)) + C_4 \log(x) x^3 \sin(\log(x)) \\ &\qquad\qquad + C_5 x^3 + C_6 x^3 \log(x) \end{aligned}$$

gegeben ist. Was ist die Vielfachheit der Nullstelle $3+i$ des Indexpolynoms dieser Differentialgleichung?

(a) 1.

(b) 4.

(c) 2.

Offene Aufgabe.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen des Indexpolynoms der Differentialgleichung

$$x^2 y'' - y' x + 2y = 0. \tag{1}$$

(b) Angenommen, das Indexpolynom einer homogenen Eulerschen Differentialgleichung 5. Ordnung besitzt die einfachen Nullstellen $1 \pm 2i$, 2 und eine doppelte Nullstelle bei 0. Was ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

(c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y'' - y' x + 2y = \log(x)$$

der Form $A \log(x) + B$, wobei $A, B \in \mathbb{R}$.

7. **Single Choice.** Es sei γ ein geschlossener Weg in der Ebene und $\vec{v}$ ein Vektorfeld. Die Arbeit von $\vec{v}$ entlang γ sei 2. Welche Eigenschaft kann $\vec{v}$ besitzen?

   (a) $\vec{v}$ ist quellenfrei.

   (b) $\vec{v}$ ist wirbelfrei.

   (c) $\vec{v}$ ist ein Potentialfeld.

   Offene Aufgabe. Es bezeichne S den Zylindermantel mit aufgesetzten Spitzkegel

$$S = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 4,\ -2 \le z \le 2\right\} \cup \left\{(x,y,z) : (4-z)^2 = x^2 + y^2,\ 2 \le z \le 4\right\}.$$

   Weiter sei $\vec{c}(x,y,z) = (-x\log(4-z), -y\log(4-z) + x, 0)$ ein Vektorfeld.

   (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S.

   (b) Berechnen Sie $\operatorname{rot}(\vec{c})$.

   (c) Es seien die Wege γ_1, γ_2 gegeben durch

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, 0, 4-t), & t \in [0,2] \\ \gamma_2(t) = (2\cos(-t), 2\sin(-t), 2)\,, & t \in [0,\pi]. \end{cases}$$

   Berechnen Sie die Arbeit von $\vec{c}$ entlang des Weges $\gamma_1 + \gamma_2$, (d.h. entlang des Weges der entsteht, wenn man zuerst γ_1 und anschliessend γ_2 durchläuft).

Single Choice. *Die folgenden elf Aufgaben sind Single Choice-Aufgaben. Eine richtige Antwort ist* 2 *Punkte, eine falsche Antwort* −1 *Punkt und keine Antwort* 0 *Punkte wert. Ist die Gesamtpunktezahl über alle Single Choice-Aufgaben negativ, so wird sie auf* 0 *Punkte aufgerundet.*

8. Die Kurve K ist durch

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = (\sin(2t), \cos(2t))$$

gegeben. Bestimmen Sie die Bogenlänge von K zwischen $t = 0$ und $t = 1$.

(a) 2

(b) 1/2

(c) 1

9. Bestimmen Sie den Wert von

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - 11x + 24}.$$

Hinweis: 3 ist eine Nullstelle des Nenners und des Zählers.

(a) -2

(b) 1

(c) $\frac{-7}{8}$

10. Es sei $\vec{v}$ ein Vektorfeld und f ein Skalarfeld. Welche Identität gilt nicht immer?

(a) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0$

(b) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) = \vec{0}$

(c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$

11. Die Stammfunktion von $\sin(x^2)\sin(x)$ kann nicht mithilfe elementarer Funktionen ausgedrückt werden. Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\sin(x)\,dx.$$

(a) Das Integral existiert nicht, da die Funktion $F\colon b \mapsto \int_{-b}^{b} \sin(x^2)\sin(x)\,dx$ gegen unendlich strebt, wenn b gegen unendlich strebt.

(b) Die Funktion $F\colon b \mapsto \int_{-b}^{b} \sin(x^2)\sin(x)\,dx$ ist beschränkt, aber $\lim_{b\to\infty} F(b)$ existiert nicht.

(c) 0

12. Berechnen Sie, durch die Methode der Substitution oder auf andere Art, das Integral

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

(a) $\frac{\pi}{4}$

(b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{8}$

13. Es sei $z = 3 + i\sqrt{3}$. Welchen Wert hat $\arg\left(z^5\right)$?

    (a) $\frac{5\pi}{6}$

    (b) $\frac{5\pi}{4}$

    (c) $\frac{5\pi}{3}$

14. Was ist der Konvergenzbereich der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n?$$

    (a) $\{0\}$

    (b) $\mathbb{R}$

    (c) $(-2, 2)$

15. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann fällt der Wert der Funktion f am schnellsten

    (a) in Richtung des Gradienten.

    (b) entgegengesetzt der Richtung des Gradienten.

    (c) orthogonal zur Richtung des Gradienten.

16. Welche ist die Gleichung der Tangentialebene an das Ellipsoid $x^2 + y^2 + 4z^2 = 6$ im Punkt $(1, 1, 1)$?

    (a) $x + y + 2z = 4$

    (b) $x + y + 4z = 6$

    (c) $x + y - 4z = -2$

17. Der Parameter $a \in \mathbb{R}$ sei gegeben. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a, ob das uneigentliche Integral

$$I(a) = \int_1^{\infty} x^{a \sin x}\, dx$$

konvergiert oder divergiert.

    (a) $I(a)$ konvergiert für jedes a.

    (b) $I(a)$ divergiert für jedes a.

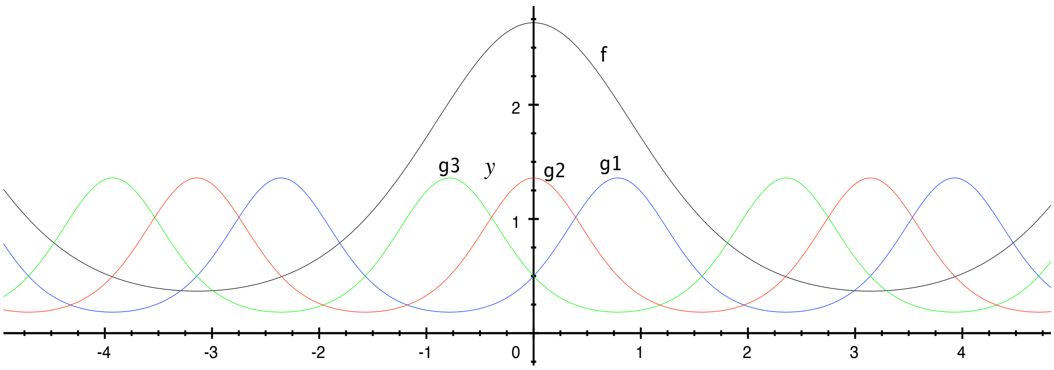
    (c) Es existieren a_1 und a_2, sodass $I(a_1)$ konvergiert und $I(a_2)$ divergiert.

18. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = \exp(\cos(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Weiter sei die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = \frac{1}{2}\exp(\sin(2x))$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Welcher der Graphen der Funktionen g_1, g_2 bzw. g_3 entspricht dem Graph der Funktion g in der nachstehenden Abbildung?

(a) g_1 (blau)

(b) g_2 (rot)

(c) g_3 (grün)



Multiple Choice. *Die folgenden neun Aufgaben sind Multiple Choice-Aufgaben. Jede der Multiple Choice-Aufgaben besteht aus drei Teilfragen. Wird eine Teilfrage richtig beantwortet, gibt es* 2 *Punkte, bei falscher Beantwortung* -2 *Punkte und bei Nichtbeantwortung* 0 *Punkte. Ist die Gesamtpunktezahl über alle Multiple Choice-Aufgaben negativ, so wird sie auf* 0 *Punkte aufgerundet.*

19. Es seien $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Für welche Paare (u, v) existiert eine Funktion f, sodass $f_x = u$ und $f_y = v$ gilt?

    (a) $u = e^{x^2} + y^2$, $v = 2xy$.

    (b) $u = \cos(x)\cos(y)$, $v = -\sin(x)\sin(y)$.

    (c) $u = 2x\cos(y)e^{x^2\cos(y)}$, $v = -\sin(y)e^{x^2\cos(y)}$.

20. Es bezeichne E ein gefülltes Ellipsoid um den Ursprung so dass $(0, 0, 2018) \in E$. Bestimmen Sie für jedes der folgenden Vektorfelder $\vec{v}$, ob der Satz von Gauss für den Bereich E angewandt werden darf.

    (a) $\vec{v} = (e^x, e^y, e^z)$

    (b) $\vec{v} = (x^3 + y^3, yz, xy)$

    (c) $\vec{v} = (\sin(x), \cos(y), \tan(z))$

21. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y' = \frac{ax + by}{bx + cy}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{2}$$

    Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr ist.

    (a) Die Differentialgleichung ist linear.

    (b) Die Differentialgleichung ist eine homogene Differentialgleichung.

    (c) Die Differentialgleichung ist separierbar.

22. Es sei $\vec{v}$ ein wirbelfreies Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie welche der folgenden Aussagen wahr sind.

    (a) Der Fluss $\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dO$ aus einer geschlossenen Oberfläche hinaus ist immer 0.

    (b) Die Arbeit entlang eines Weges $\gamma\colon t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ hängt nur vom Start- und Endpunkt ab, nicht aber vom Weg selbst.

    (c) Es existiert immer ein Potential $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sodass $\vec{v} = \operatorname{grad} f$.

23. Der Kreis $k \subset \mathbb{R}^3$ sei durch $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$ in kartesischen Koordinaten gegeben. Bestimmen Sie für jede der folgenden Mengen, ob Sie k enthält.

(a) In Zylinder-Koordinaten, die Menge aller Punkte (ρ, φ, z) mit $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $z = 2$.

(b) In Kugel-Koordinaten, die Menge aller Punkte (r, φ, θ) mit $r = \sqrt{5}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

(c) In Zylinder-Koordinaten, die Menge aller Punkte (ρ, φ, z) mit $\rho = \sqrt{5}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $z = 2$.

24. Die Funktion $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = x^{\sin(x)+3} \log(x).$$

Welche der folgenden Funktionen $g\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ erfüllen $g = o(f)$ mit $x \to +\infty$?

(a) $g(x) = x^2$.

(b) $g(x) = x^3 \log(x)$.

(c) $g(x) = x^4 \sin(x)$.

25. Welche der folgenden Terme kommen in der Partialbruchzerlegung von

$$\frac{6x}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$$

vor?

Hinweis: Alle Nullstellen des Nenners haben Betrag 1.

(a) $\dfrac{3}{x-1}$

(b) $\dfrac{3}{(x-1)^2}$

(c) $-\dfrac{3}{x^2+1}$

26. Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen, ob die Gerade

$$y = x + 1$$

eine Tangente an diese Funktion ist.

(a) $g(x) = x^3 \log(x)$.

(b) $y = 2\sqrt{x}$

(c) $y = e^x$

27. Betrachten Sie das Integral

$$I = \int_0^1 \int_0^x y \, dy \, dx.$$

Welche der folgenden Ausdrücke sind korrekte Umformungen von I?

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y y \, dx \, dy$

(b) $\displaystyle\int_0^x \int_0^1 y \, dx \, dy$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y x \, dx \, dy$