

Lösung - Schnellübung 12

1. Lösen Sie Differenzialgleichung

$$1 - x^2 + y^2 = 2xyy' \quad (1)$$

mit Hilfe der Substitution $u(x) = (y(x))^2$.

Lösung: Mit $u(x) = y(x)^2$ erhält man $u'(x) = 2y(x)y'(x)$. Eingesetzt in die Differenzialgleichung ergibt dies

$$1 - x^2 + u = xu' \quad \text{oder} \quad u' - \frac{1}{x}u = \frac{1 - x^2}{x}.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung. Wir suchen die allgemeine Lösung u_h der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung $u' - \frac{1}{x}u = 0$ (sie ist separierbar). Es gilt

$$u' - \frac{1}{x}u = 0 \implies \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \implies \ln|u| = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$u_h(x) = Kx, \quad K = \pm e^C.$$

Nun suchen wir eine partikuläre Lösung u_p der Differenzialgleichung $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1-x^2}{x}$: Wir benutzen die Methode von Lagrange (Variation der Konstanten), wähle

$$u_p(x) = \gamma(x) \cdot u_h(x) = \gamma(x) \cdot Kx.$$

Eingesetzt in $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1-x^2}{x}$ liefert

$$\gamma'(x) = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1}{u_h(x)} = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1}{Kx} = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \implies \gamma(x) = \frac{1}{K} \left(-\frac{1}{x} - x \right).$$

(Auf die Integrationskonstante kann verzichtet werden, da wir nur eine partikuläre Lösung suchen). Also ist

$$u_p(x) = \gamma(x) \cdot Kx = \frac{1}{K} \left(-\frac{1}{x} - x \right) \cdot Kx = -1 - x^2.$$

Damit ist die allgemeine Lösung von $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1-x^2}{x}$

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = Kx - 1 - x^2,$$

und somit ist die allgemeine Lösung von $1 - x^2 + y^2 = 2xyy'$ gegeben durch

$$y(x)^2 = u(x) = Kx - 1 - x^2.$$

Zu Übungszwecken skizzieren wir die Lösung (auch wenn das in der Übung nicht gefragt ist). Durch quadratische Ergänzung erhält man

$$\begin{aligned}
 y^2 = Kx - 1 - x^2 &\iff y^2 - Kx + x^2 = -1 \\
 &\iff y^2 + x^2 - Kx + \underbrace{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \left(\frac{K}{2}\right)^2}_{\left(x - \frac{K}{2}\right)^2} = -1 \\
 &\iff \left(x - \frac{K}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{K^2}{4} - 1. \tag{2}
 \end{aligned}$$

Aus (2) folgt, dass die Lösungskurven (im Fall $\frac{K^2}{4} - 1 > 0$ oder $K^2 > 4$ oder $|K| > 2$) Kreise mit Mittelpunkt $\left(\frac{K}{2}, 0\right)$ und Radius $\sqrt{\frac{K^2}{4} - 1}$ sind.

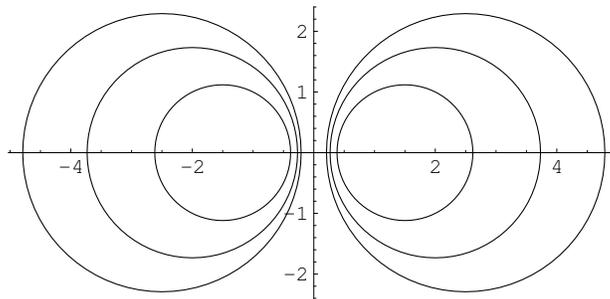


Abbildung 1: Lösungskurven für $K = -5, -4, -3, 3, 4, 5$

2.

$$\begin{cases} y' - 3y = e^{2x}, & x \in (-\infty, \infty) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Lösung: Die homogene Gleichung $y' - 3y = 0$ ist separierbar und hat allgemeine Lösung $y_h = Ce^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$. Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $y_p = \alpha e^{2x}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, welches wir durch Einsetzen in die DGL bestimmen:

$$y'_p - 3y_p = 2\alpha e^{2x} - 3\alpha e^{2x} = -\alpha e^{2x} = e^{2x}.$$

Nach Vergleichen der Koeffizienten folgt, dass $\alpha = -1$ ist. Somit ist $y_p = -e^{2x}$ und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y = Ce^{3x} - e^{2x}.$$

Aus der Anfangsbedingung ergibt sich:

$$y(0) = C - 1 = 0 \implies C = 1.$$

Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y = e^{3x} - e^{2x}.$$

Siehe nächstes Blatt!

3.

$$\begin{cases} xy' - 2y = x^5, & x \in (0, \infty) \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Lösung: Die homogene Gleichung $xy' - 2y = 0$ ist separierbar und hat allgemeine Lösung $y_h = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$. Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den polynomiellen Ansatz

$$y_p = \alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta.$$

Wir setzen y_p in die Gleichung ein, um die Koeffizienten zu bestimmen:

$$xy'_p - 2y_p = 3\alpha x^5 + 2\beta x^4 + \gamma x^3 - \varepsilon x - 2\zeta = x^5.$$

Nach Vergleichen der Koeffizienten folgt, dass $\alpha = 1/3$ und $\beta = \gamma = \varepsilon = \zeta = 0$ sind. Somit ist $y_p = \frac{1}{3}x^5$ und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y = Cx^2 + \frac{x^5}{3}.$$

Aus der Anfangsbedingung ergibt sich:

$$y(0) = C + \frac{1}{3} = 1 \implies C = \frac{2}{3}.$$

Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y = \frac{2x^2 + x^5}{3}.$$

4.

$$\begin{cases} y' + y \tan x = \sin 2x, & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Lösung: Wir lösen die homogene Gleichung $y' + y \tan x = 0$:

$$\begin{aligned} y'_h + y_h \tan x = 0 &\iff \frac{y'_h}{y_h} = -\tan x \implies \log |y_h| = \log |\cos x| + K_1 \\ &\implies y_h = K_2 \cos x. \end{aligned}$$

Hierbei sind K_1 und K_2 Konstanten. Für die inhomogene Gleichung $y' + y \tan x = \sin 2x$ machen den Lagrange-Ansatz $y = \gamma(x) \cos x$, wobei γ eine Funktion von x ist:

$$\begin{aligned} y' + y \tan x &= \gamma'(x) \cos x - \gamma(x) \sin x + \gamma(x) \cos x \tan x = \gamma'(x) \cos x \\ &= \sin 2x = 2 \sin x \cos x. \end{aligned}$$

Dann ist $\gamma'(x) = 2 \sin x$ und somit $\gamma(x) = -2 \cos x + K$ für eine Konstante K . Wir haben also die allgemeine Lösung

$$y = (-2 \cos x + K) \cos x = K \cos x - 2 \cos^2 x.$$

Aus der Anfangsbedingung ergibt sich:

$$y(0) = K - 2 = 2 \implies K = 4.$$

Dann ist die gesuchte Lösung $y = 4 \cos x - 2 \cos^2 x$.

Bitte wenden!

5.

$$\begin{cases} (1+x^2)y' + 4xy = (1+x^2)^{-2}, & x \in (-\infty, \infty) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Lösung: Wir lösen die homogene Gleichung $(1+x^2)y' + 4xy = 0$:

$$\begin{aligned} (1+x^2)y'_h + 4xy_h = 0 &\iff \frac{y'_h}{y_h} = -\frac{4x}{1+x^2} \implies \log|y_h| = -2\log(1+x^2) + K_1 \\ &\implies y_h = \frac{K_2}{(1+x^2)^2}, \end{aligned}$$

wobei K_1 und K_2 Konstanten sind. Für die inhomogene Gleichung $(1+x^2)y' + 4xy = (1+x^2)^{-2}$ machen den Lagrange-Ansatz $y = \frac{\gamma(x)}{(1+x^2)^2}$, wobei γ eine Funktion von x ist:

$$\begin{aligned} (1+x^2)y' + 4xy &= (1+x^2) \cdot \frac{\gamma'(x)(1+x^2)^2 - 4x(1+x^2) \cdot \gamma(x)}{(1+x^2)^4} + \frac{4x\gamma(x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{\gamma'(x)}{1+x^2} = (1+x^2)^{-2} \end{aligned}$$

Dann ist $\gamma'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und somit $\gamma(x) = \arctan x + K$ für eine Konstante K . Wir haben also die allgemeine Lösung

$$y = \frac{\arctan x + K}{(1+x^2)^2}.$$

Aus der Anfangsbedingung ergibt sich:

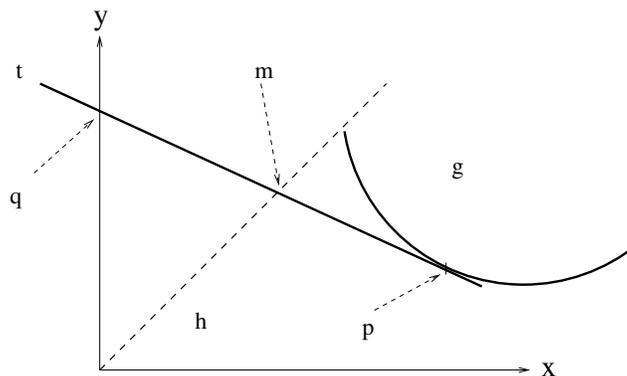
$$y(0) = K = 0 \implies K = 0.$$

Dann ist die gesuchte Lösung

$$y = \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}.$$

6. Finden Sie alle Kurven, gegeben durch $y = y(x)$, welche die folgende Bedingung erfüllen: Es sei t die Tangente im Punkt P der Kurve und Q ihr Schnittpunkt mit der y -Achse. Dann liegt der Mittelpunkt der Strecke \overline{PQ} auf der Geraden, gegeben durch $y = x$.

Lösung: Sei $P = (x, y(x)) \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt auf der Kurve K , gegeben durch $y = y(x)$ und $Q = (0, q) \in \mathbb{R}^2$.



Siehe nächstes Blatt!

Die Tangente t in P an die Kurve K ist gegeben durch

$$t : z \longmapsto y'(x)(z - x) + y(x).$$

Die Tangente t soll durch $Q = (0, q)$ gehen. Also gilt

$$q = t(0) = y'(x)(0 - x) + y(x) \quad , \text{ also } q = -y'(x)x + y(x). \quad (3)$$

Andererseits ist der Mittelpunkt der Strecke \overline{PQ} gegeben durch

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= (x_M, y_M) = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \right) = \frac{1}{2} [(x, y(x)) + (0, q)] = \frac{1}{2} (x, y(x) + q) \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} (x, y(x) - y'(x)x + y(x)) = \left(\frac{1}{2}x, y(x) - \frac{1}{2}y'(x)x \right), \end{aligned}$$

wobei $O = (0, 0)$ ist. Da der Mittelpunkt (x_M, y_M) auf der Geraden, gegeben durch $y = x$, liegt, muss gelten $x_M = y_M$, also

$$\frac{1}{2}x = y(x) - \frac{1}{2}y'(x)x \iff y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = -1 \quad (x \neq 0),$$

d.h $y : x \mapsto y(x)$ ist Lösung der folgenden inhomogenen linearen Differenzialgleichung erster Ordnung

$$y' - \frac{2}{x}y = -1.$$

Wir suchen eine allgemeine Lösung y_h der zugehörigen (separierbaren) homogenen Differenzialgleichung:

$$y' - \frac{2}{x}y = 0 \implies \int \frac{1}{y} dy = 2 \int \frac{1}{x} dx \implies \ln |y| = 2(\ln |x| + C), \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\implies y_h(x) = Kx^2, \quad K \in \mathbb{R}$$

Für die partikuläre Lösung y_p der Differenzialgleichung $y' - \frac{2}{x}y = -1$ machen wir folgenden Ansatz:

$$y_p(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Damit ist $y'_p(x) = a$. Eingesetzt in die Differenzialgleichung $y' - \frac{2}{x}y = -1$ oder $y'x - 2y = -x$ liefert

$$(-1) \cdot x = ax - 2(ax + b) = ax - 2ax - 2b = -ax - 2b.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $-a = -1$ und $-2b = 0$, also $a = 1$ und $b = 0$. Damit ist $y_p(x) = x$. Die allgemeine Lösung von $y' - \frac{2}{x}y = -1$ ist somit

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Kx^2 + x, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Dies ist die Gleichung der Kurven, die unsere Bedingungen erfüllen.