Lösung - Schnellübung 13

1. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + (\lambda - 4)\, y' + \frac{1}{2}\,\lambda\, y = 0\,.$$

Für welche Werte des reellen Parameters λ gibt es eine von Null verschiedene Lösung $y(x)$, die für $x \to \infty$ beschränkt bleibt?

Lösung: Man berechnet zuerst die Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms $\mu^2 + (\lambda - 4)\mu + \frac{1}{2}\,\lambda = 0$ (in der Variablen μ). Diese sind

$$\mu = \frac{1}{2}\big(4 - \lambda \pm \sqrt{(\lambda-4)^2 - 2\lambda}\,\big) = \frac{1}{2}\big(4 - \lambda \pm \sqrt{(\lambda-5)^2 - 9}\,\big).$$

Bezeichnen wir durch μ_1 (bzw. μ_2) die Nullstelle mit $-$ (bzw. mit $+$). Hier unterscheiden wir drei Fälle:

- Wenn die Nullstelle(n) reell sind (d.h. wenn $\lambda \geq 8$ oder $\lambda \leq 2$), dann ist die allgemeine Lösung der Gleichung der Gestalt
$$y(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_2 x},$$
wenn $\mu_1 \neq \mu_2$, oder
$$y(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 x e^{\mu_1 x},$$
wenn $\mu_1 = \mu_2$. Man bemerke $\mu_2 \geq \mu_1$; wenn $\mu_1 > 0$, bleibt also y für $x \to \infty$ genau dann beschränkt, wenn $C_1 = C_2 = 0$. Anders gesagt: $\mu_1 \leq 0$ ist eine notwendige Bedingung für die Existenz einer von Null verschiedenen Lösung der Gleichung. Sie ist auch hinreichend, denn $y(x) = C_1 e^{\mu_1 x}$ für $C_1 \neq 0$ ist immer beschränkt und nicht Null, wenn $\mu_1 \leq 0$.

  Diese Bedingung können wir als Funktion von λ umformulieren, wie folgt:
$$\begin{aligned}\mu_1 \leq 0 &\Longleftrightarrow \big(\lambda \geq 4 \quad \text{oder} \quad (\lambda-4)^2 \leq (\lambda-5)^2 - 9\big)\\ &\Longleftrightarrow (\lambda \geq 4 \quad \text{oder} \quad \lambda \leq 0)\,.\end{aligned}$$
  Nach unserer Anfangsannahme (reelle Nullstellen) ist also $\mu_1 \leq 0$ genau dann, wenn $\lambda \geq 8$ oder $\lambda \leq 0$.
- Wenn die Nullstellen nicht reell und konjugiert sind (d.h. wenn $2 \leq \lambda \leq 8$), dann ist die allgemeine Lösung der Gestalt
$$y(x) = e^{\frac{4-\lambda}{2}x}\,(C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x)\,,$$
wobei $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{9 - (\lambda-5)^2}$ ist. Die Existenz einer von Null verschiedenen Lösung dieser Gestalt ist genau dann garantiert, wenn $\frac{4-\lambda}{2} \leq 0$ ist, d.h. wenn $\lambda \geq 4$. Nach unserer Anfangsannahme (konjugierte komplexe Nullstellen) muss dann $4 \leq \lambda \leq 8$ sein.

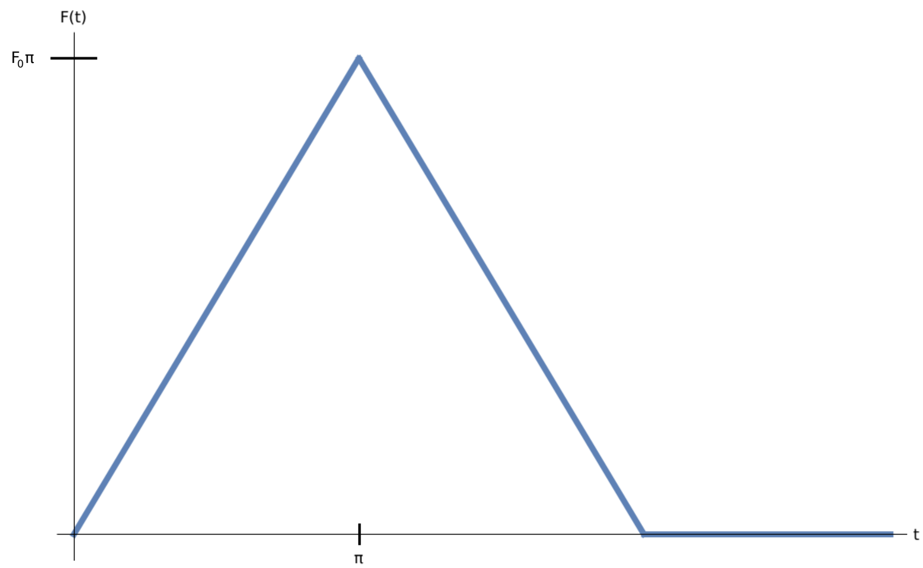
Die Bedingung ist also $\lambda \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$.

2. Man finde die Lösung des Anfangswertproblem

$$u'' + u = F(t)$$
$$u(0) = u'(0) = 0,$$

wobei F_0 eine Konstante ist und

$$F(t) = \begin{cases} F_0 t, & 0 \le t < \pi \\ F_0(2\pi - t), & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi. \end{cases}$$



Lösung: Um die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zu bestimmen, müssen wir sie stückweise im Inneren der drei Definitionsintervalle von F. Dann benutzen wir die Differenzierbarkeit der Lösung u, um die Stücklösungen zusammenzukleben.

In jedem Stuck der Definition von F ist die Lösung der homogenen Gleichung

$$u_h(t) = A\,\cos t + B\,\sin t$$

(denn das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 1$ hat die zwei Nullstellen $\lambda = \pm i$). Für die partikuläre Lösung haben wir in den verschiedenen Stücken:

- In $(0,\,\pi)$: mit dem Ansatz $u_p(t) = \alpha t + \beta$ kann man leicht überprüfen, dass $u_p(t) = F_0 t$ die Gleichung löst.
- In $(\pi,\,2\pi)$: analog folgt $u_p(t) = F_0(2\pi - t)$.
- In $(2\pi,\,\infty)$ ist die Gleichung homogen.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung muss also der Gestalt

$$u(t) = \begin{cases} A_1\,\cos t + B_1\,\sin t + F_0 t, & \text{wenn } 0 < t < \pi \\ A_2\,\cos t + B_2\,\sin t + F_0(2\pi - t), & \text{wenn } \pi < t < 2\pi \\ A_3\,\cos t + B_3\,\sin t, & \text{wenn } t > 2\pi \end{cases}$$

Siehe nächstes Blatt!

sein, für Konstanten A_i, B_i. Da die Funktion $u: [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tatsächlich die Gleichung löst, muss sie mindestens zweimal differenzierbar sein. Insbesondere sind u und die Ableitung u' stetige Funktionen. Dies bestimmt die Konstanten $A_2,\ B_2,\ A_3,\ B_3$ als Funktionen von A_1 und B_1:

- Zuerst berechnen wir die Ableitung u':

$$u'(t) = \begin{cases} -A_1 \sin t + B_1 \cos t + F_0, & \text{wenn } 0 < t < \pi \\ -A_2 \sin t + B_2 \cos t - F_0, & \text{wenn } \pi < t < 2\pi \\ -A_3 \sin t + B_3 \cos t, & \text{wenn } t > 2\pi. \end{cases}$$

- Aus der Stetigkeit von u und u' an der Stelle $t = \pi$ folgt:

$$-A_1 + F_0\pi = \lim_{t\to \pi^-} u(t) = \lim_{t\to \pi^+} u(t) = -A_2 + F_0\pi, \text{ bzw.}$$

$$-B_1 + F_0 = \lim_{t\to \pi^-} u'(t) = \lim_{t\to \pi^+} u'(t) = -B_2 - F_0.$$

  Deshalb sind $A_1 = A_2$ und $B_2 = B_1 - 2F_0$.
- Aus der Stetigkeit von u und u' an der Stelle $t = 2\pi$ folgt:

$$A_2 = \lim_{t\to 2\pi^-} u(t) = \lim_{t\to 2\pi^+} u(t) = A_3, \text{ bzw.}$$

$$B_2 - F_0 = \lim_{t\to 2\pi^-} u'(t) = \lim_{t\to 2\pi^+} u'(t) = B_3.$$

  Deshalb sind $A_3 = A_2 = A_1$ und $B_3 = B_2 - F_0 = B_1 - 3F_0$.

Wir erhalten also:

$$u(t) = \begin{cases} A_1 \cos t + B_1 \sin t + F_0 t, & \text{wenn } 0 < t < \pi \\ A_1 \cos t + (B_1 - 2F_0) \sin t + F_0(2\pi - t), & \text{wenn } \pi \le t < 2\pi \\ A_1 \cos t + (B_1 - 3F_0) \sin t, & \text{wenn } t \ge 2\pi. \end{cases}$$

Man soll bemerken, hier wurde wegen Stetigkeit von u auch $u(\pi) := \lim_{t\to \pi^-} u(t) = \lim_{t\to \pi^+} u(t)$ definiert. Analog wurde auch $u(2\pi)$ definiert.

Wir wenden jetzt die Anfangsbedingungen, um A_1 und B_1 zu bestimmen und somit unser Anfangswertproblem zu lösen:

- $0 = u(0) = \lim_{t\to 0^+} u(t) = A_1$.
- $0 = u'(0) = \lim_{t\to 0^+} u'(t) = B_1 + F_0$.

Die Lösung des Anfangswertproblemes ist dann:

$$u(t) = \begin{cases} -F_0 \sin t + F_0 t, & \text{wenn } 0 \le t < \pi \\ -3F_0 \sin t + F_0(2\pi - t), & \text{wenn } \pi \le t < 2\pi \\ -4F_0 \sin t, & \text{wenn } t \ge 2\pi. \end{cases}$$

3. Man löse das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x} & = & 2y \\ \dot{y} & = & -4x + 6y \\ x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & 2 \end{cases}$$

Bitte wenden!

Lösung:

Dieses System kann geschrieben werden als

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} z = Az \quad \text{für } z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Eigenwerte λ_1 bzw. λ_2 und die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ bzw. $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ von A $\left(E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$$0 = \det(A - \lambda E_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ -4 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4).$$

Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$. Die zugehörigen Eigenvektoren berechnen sich aus

$$(A - \lambda_1 E_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = b.$$

Damit ist der Eigenraum von A zum Eigenwert λ_1 gegeben durch $E_{\lambda_1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ und somit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1. Analog berechnen wir

$$(A - \lambda_2 E_2)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow 2c = d.$$

Damit ist der Eigenraum von A zum Eigenwert λ_2 gegeben durch $E_{\lambda_2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ und somit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_2. Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ ist, ist $z_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ eine Lösung von $\dot{z} = Az$. (Genauer: Sei $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, dann gilt $2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es folgt durch Multiplikation von e^{2t} beidseitig, dass $2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$, also $\dot{z}_1(t) = Az_1(t)$, d.h. $t \longmapsto z_1(t)$ ist eine Lösung von $\dot{z} = Az$). Analog gilt, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$ ist, ist $z_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$ eine Lösung von $\dot{z} = Az$. Da z_1 und z_2 linear unabhängig sind, gilt

$$z(t) = \alpha z_1(t) + \beta z_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{2t} + \beta e^{4t} \\ \alpha e^{2t} + 2\beta e^{4t} \end{pmatrix}$$

oder, da $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$x(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{4t} \text{ und } y(t) = \alpha e^{2t} + 2\beta e^{4t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ist die allgemeine Lösung von $\dot{z} = Az$. Wir bestimmen noch die Konstanten α und β

$$1 = x(0) = \alpha + \beta \quad \text{und} \quad 2 = y(0) = \alpha + 2\beta, \quad \text{es folgt} \quad \alpha = 0, \beta = 1.$$

Die gesuchte Lösung des Systems ist somit

$$x(t) = e^{4t} \text{ und } y(t) = 2e^{4t}.$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 3x$$

und zeige, dass sie nur eine auf der ganzen reellen Achse definierte Lösung hat.

Lösung: Dies ist eine inhomogene Eulersche Differentialgleichung. Die Lösung des homogenen Problems findet man mit Hilfe des Indexpolynoms.

$$\alpha(\alpha-1) + 4\alpha + 2 = \alpha^2 + 3\alpha + 2 = (\alpha+1)(\alpha+2)$$

Die allgemeine Lösung lautet dann $y_{\mathrm{h}}(x) = C_1x^{-1} + C_2x^{-2}$. Für eine partikuläre Lösung drängt sich der Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = A\,x$ auf. Man findet $A = \frac{1}{2}$.

[Wer keinen passenden Ansatz für eine partikuläre Lösung findet, kommt mit dem Verfahren von Lagrange (Skript Kapitel VII S. 79/80) zum Ziel. Eine partikuläre Lösung ist von der Form $y_{\mathrm{P}}(x) = \gamma_1(x)\,x^{-1} + \gamma_2(x)\,x^{-2}$, wobei man $\gamma_1'(x)\,x^{-1} + \gamma_2'(x)\,x^{-2} = 0$ annehmen darf. Man erhält dann das System

$$\gamma_1'\,x^{-1} + \gamma_2'\,x^{-2} = 0 \tag{1}$$

$$-\gamma_1'\,x^{-2} - 2\gamma_2'\,x^{-3} = \frac{3}{x}\,. \tag{2}$$

Aus $(1) + x\cdot(2)$ bekommt man $-\gamma_2'\,x^{-2} = 3$ oder $\gamma_2' = -3x^2$ oder $\gamma_2(x) = -x^3$, und durch Einsetzen in (1) bekommt man $\gamma_1'\,x^{-1} - 3 = 0$ oder $\gamma_1' = 3x$ oder $\gamma_1(x) = \frac{3}{2}x^2$. Man erhält für die partikuläre Lösung $y_{\mathrm{P}}(x) = \frac{3}{2}x - x = \frac{1}{2}x$.]

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{1}{2}x\,.$$

Diese Lösung ist genau dann auf der ganzen reellen Achse definiert, wenn $C_1 = C_2 = 0$. Die gesuchte Lösung lautet so:

$$\boxed{y(x) = \frac{x}{2}}$$

5. Eine Lösungskurve $y = u(x)$ der Differentialgleichung $y'' - 3y' - 4y = 0$ schneidet eine Lösungskurve $y = w(x)$ der Gleichung $y'' + 4y' - 5y = 0$ im Ursprung. An dieser Stelle haben beide Kurven die selbe Steigung. Man bestimme die Funktionen u und w, wenn ausserdem die Bedingung

$$\lim_{x\to\infty} \frac{w(x)^4}{u(x)} = \frac{5}{6}$$

erfüllt wird.

Lösung: Die charakteristischen Gleichungen der DGL $y'' - 3y' - 4y = 0$ und $y'' + 4y' - 5y = 0$ sind

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1) = 0 \text{ bzw.}$$

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = (\lambda+5)(\lambda-1) = 0.$$

Dann sind die gesuchten Integralkurven u und w der Gestalt

$$u(x) = A_1e^{4x} + A_2e^{-x}, \quad w(x) = B_1e^{-5x} + B_2e^{x}$$

für zu bestimmende Konstanten $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2 \in \mathbb{R}$. Da beide Kurven durch den Ursprung durchgehen, sind

$$u(0) = A_1 + A_2 = 0 \text{ und } w(0) = B_1 + B_2 = 0.$$

Dies heisst $A_1 = -A_2$ und $B_1 = -B_2$. Somit hat man:

$$u(x) = A_1\left(e^{4x} - e^{-x}\right), \quad w(x) = B_1\left(e^{-5x} - e^{x}\right).$$

Bitte wenden!

Da die Kurven die selbe Steigung im Ursprung haben, gilt $u'(0) = w'(0)$. Die Ableitungen von u und w sind

$$u'(x) = A_1 \left(4e^{4x} + e^{-x}\right), \quad w'(x) = B_1 \left(-5e^{-5x} - e^{x}\right)$$

Nach Auswertung auf $x = 0$ erhält man die Gleichung

$$5A_1 = -6B_1 \quad (1).$$

Wir untersuchen schliesslich die Bedingung des Limes, um die letzte benötigte Gleichung zu bekommen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{w(x)^4}{u(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(B_1 \left(e^{-5x} - e^{x}\right)\right)^4}{A_1 \left(e^{4x} - e^{-x}\right)} = \frac{B_1^4}{A_1} \lim_{x\to\infty} \frac{\left(e^{-6x} - 1\right)^4}{1 - e^{-5x}} = \frac{B_1^4}{A_1} = \frac{5}{6}.$$

Daraus folgt, dass $A_1, B_1 \neq 0$ sind und

$$6B_1^4 = 5A_1 \quad (2).$$

Es ergibt sich also aus (1) und (2), dass $B_1 = -1$ und $A_1 = \frac{6}{5}$ sind, und somit sind die gesuchten Integralkurven:

$$u(x) = \frac{6}{5}\left(e^{4x} - e^{-x}\right); \quad w(x) = e^{x} - e^{-5x}.$$