

## Lösung - Schnellübung 8

1. Finden Sie eine Funktion  $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ , die folgenden Bedingungen genügt

$$f_{xy} = 1, \quad f(x, 1) = x^3, \quad f(0, y) = e^{y-1} - 1.$$

**Lösung:** Aus  $f_{xy} = 1$  folgt (durch Integration nach  $y$ )  $f_x(x, y) = y + v(x)$ , wobei  $v$  eine Funktion von  $x$  ist. Damit gilt (Integration nach  $x$ )

$$f(x, y) = xy + \underbrace{\int v(x) dx}_{=: A(x)} + b(y), \quad (1)$$

wobei  $b$  eine Funktion von  $y$  und  $A$  eine Funktion von  $x$  ist.

Aus  $f(x, 1) = x^3$  erhält man

$$x^3 = x + A(x) + b(1). \quad (2)$$

Setze  $x = 0$  in (2), wir erhalten  $-b(1) = A(0)$ . Eingesetzt in (2) ergibt

$$A(x) = x^3 - x + A(0). \quad (3)$$

Aus  $f(0, y) = e^{y-1} - 1$  folgt  $e^{y-1} - 1 = A(0) + b(y)$ , folglich gilt

$$b(y) = e^{y-1} - 1 - A(0). \quad (4)$$

Setze (3) und (4) in (1) ein, man erhält

$$f(x, y) = xy + x^3 - x + A(0) + e^{y-1} - 1 - A(0) = xy + x^3 - x + e^{y-1} - 1.$$

Dies ist die Funktion mit den gewünschten Eigenschaften.

2. Die Gleichung  $z = 2y^2 + x^2$  beschreibt eine Fläche  $S$  im dreidimensionalen Raum, welche den Punkt  $P = (1, 1, 3)$  enthält. Man finde die Koordinaten des anderen Punktes von  $S$ , der auf der Normalen zu  $S$  in  $P$  liegt.

**Lösung:** Setzen wir  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z$ . Die Fläche  $S$  ist dann die Niveaufläche  $f(x, y, z) = 0$ . Die zu  $S$  normale Richtung  $\vec{n}(x, y, z)$  im Punkt  $(x, y, z)$  ist durch

$$\text{grad } f = (2x, 4y, -1)$$

gegeben; in  $P = (1, 1, 3)$  gilt damit  $\vec{n}(P) = (2, 4, -1)$ . Die Normale  $g$  zu  $S$  in  $P$  ist somit gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es bleibt nur noch, der zweite Punkt in  $g \cap S$  zu berechnen: aus

$$(1 + 2t)^2 + 2(1 + 4t)^2 - 3 + t = 21t + 36t^2 = 0$$

folgt  $t = 0$  oder  $t = -\frac{21}{36} = -\frac{7}{12}$ . Für  $t = 0$  erhalten wir  $P$ , und der gesuchte Schnittpunkt ist

$$P' = \left( -\frac{1}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{43}{12} \right).$$

3. Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $(x, y) \mapsto 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y + 4$  gegeben. Finden Sie die lokalen Extrema von  $f$  auf  $\mathbb{R}^2$  und bestimmen Sie deren Typ. Finden Sie die globalen Extrema auf der Kreisscheibe

$$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

**Lösung:** Zunächst berechnen wir die partiellen Ableitungen von  $f$ :

$$f_x = 6x - 2y - 4, f_y = -2x + 6y - 4, f_{xx} = 6, f_{xy} = -2, f_{yy} = 6.$$

An einer Extremalstelle gilt  $f_x = f_y = 0$ . Dies gibt ein lineares Gleichungssystem

$$6x - 2y = 4, -2x + 6y = 4$$

mit Lösung  $x = 1, y = 1$ . Um zu bestimmen, ob ein lokales Extremum vorliegt bzw. welcher Art das Extremum ist, berechnen wir die Hesse-Matrix

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(1, 1) & f_{xy}(1, 1) \\ f_{xy}(1, 1) & f_{yy}(1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen das charakteristische Polynom zu

$$\chi(t) = (6 - t)(6 - t) - (-2)(-2) = (6 - t - 2)(6 - t + 2).$$

Die Eigenwerte lauten also  $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 8$ . Da beide Eigenwerte positiv sind, liegt ein lokales Minimum vor.

Für die Extrema auf der Kreisscheibe müssen wir nur noch solche auf dem Rand der Kreisscheibe betrachten (da  $(1, 1)$  nicht in  $B$  enthalten ist). Wir parametrisieren den Rand mit

$$s(\phi) = (\cos(\phi), \sin(\phi)).$$

Einsetzen und verwenden von  $\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1$  gibt

$$\begin{aligned} (f \circ s)(\phi) &= 3 \cos^2(\phi) - 2 \cos(\phi) \sin(\phi) + 3 \sin^2(\phi) - 4 \cos(\phi) - 4 \sin(\phi) + 4 \\ &= 3 - 2 \cos(\phi) \sin(\phi) - 4 \cos(\phi) - 4 \sin(\phi) + 4. \end{aligned}$$

Für die Extremstellen leiten wir nach  $\phi$  ab und bestimmen die Nullstellen.

$$\begin{aligned} (f \circ s)_\phi &= -2(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)) + 4 \sin(\phi) - 4 \cos(\phi) \\ &= -2(\cos(\phi) - \sin(\phi)) \cdot (\cos(\phi) + \sin(\phi) + 2) = 0 \end{aligned}$$

Der Term  $\cos(\phi) + \sin(\phi) + 2$  kann nie verschwinden, da  $\sin$  und  $\cos$  grösser gleich  $-1$  sind und nie gleichzeitig  $-1$  werden. Deshalb ist die Ableitung genau dann 0 falls  $\cos(\phi) = \sin(\phi)$ . Dies ist genau für  $\phi = \pi/4$  und  $\phi = 5\pi/4$  erfüllt, denn die Bedingung entspricht Punkten auf dem Einheitskreis,

**Siehe nächstes Blatt!**

deren  $x$  und  $y$ -Koordinate übereinstimmen. Da wir wissen, dass auf der Scheibe  $B$  ein Minimum und Maximum existieren müssen und da wir nur zwei Kandidaten haben, müssen diese bereits ein Minimum und Maximum sein.

Wir erhalten

$$p_{\min} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad f(p_{\min}) = 6 - 4\sqrt{2}, \quad (5)$$

$$p_{\max} = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad f(p_{\max}) = 6 + 4\sqrt{2}. \quad (6)$$

4. Aus einer Funktion einer Variablen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch  $\varrho \mapsto f(\varrho)$ , entsteht durch Einsetzen von  $\varrho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  die Funktion dreier Variablen

$$\tilde{f}: (x, y, z) \mapsto f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

- a) Zeigen Sie, dass

$$\text{grad } \tilde{f} = \frac{f'(\varrho)}{\varrho} \cdot \vec{\varrho}$$

gilt, wobei  $\vec{\varrho} = (x, y, z)$  ist.

- b) Bestimmen Sie  $f$  derart, dass  $f(1) = 0$  und

$$\text{grad } \tilde{f} = \frac{\vec{\varrho}}{\varrho^5}$$

gilt.

**Lösung:**

- a) Man berechnet

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{f} = \frac{\partial}{\partial x} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \frac{d}{d\varrho} f(\varrho) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = f'(\varrho) \frac{x}{\varrho}$$

und analog für die anderen Komponenten von  $\text{grad } \tilde{f}$ . Die Behauptung folgt unmittelbar.

- b) Aus (a) muss also

$$\frac{f'(\varrho)}{\varrho} = \frac{1}{\varrho^5} \quad \text{mit} \quad f(1) = 0$$

gelten. Integrieren führt zu  $f(\varrho) = -\frac{1}{3\varrho^3} + c$ , und aus  $f(1) = 0$  folgt schliesslich

$$f(\varrho) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\varrho^3}.$$

5. Gegeben sei eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Jedes Doppelintegral unten ergibt sich aus der Berechnung des Gebietsintegrals von  $f$  über ein gegebenes Gebiet  $S$ .

a) 
$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx.$$

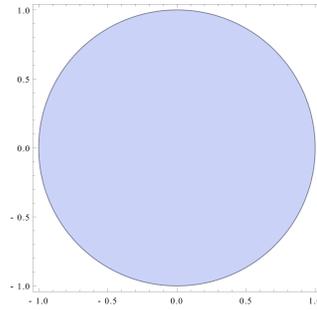
**Bitte wenden!**

$$\mathbf{b)} \int_0^\pi \int_{-\sin(x/2)}^{\sin x} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Skizzieren Sie jeweils das Gebiet  $S$  und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge.

**Lösung:**

$$\mathbf{a)} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy.$$



$$\mathbf{b)} \int_{-1}^0 \int_{-2 \arcsin y}^{\pi} f(x, y) \, dx \, dy + \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) \, dx \, dy.$$

