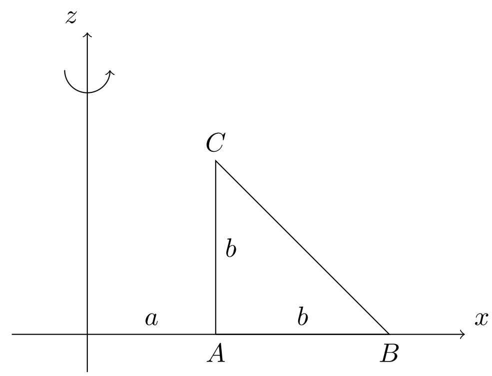
Lösung - Schnellübung 9

1. Man berechne das Trägheitsmoment um die z-Achse des homogenen Ringes (Dichte $\varrho = 1$), der durch Rotation des Dreiecks ABC um die z-Achse entsteht (siehe untenstehende Figur).



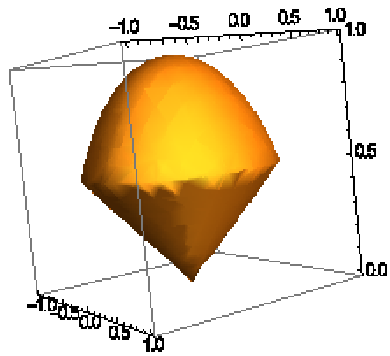
Lösung: Es gilt

$$
\begin{aligned}
I_z &= \int_0^{2\pi} \int_a^{a+b} \int_0^{a+b-r} r^2 \cdot r dz dr d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_a^{a+b} (a+b-r) r^3 dr d\phi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{(a+b)r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \right]_{r=a}^{r=a+b} d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(a+b)^5}{4} - \frac{(a+b)^5}{5} - \frac{(a+b)a^4}{4} + \frac{a^5}{5} d\phi \\
&= 2\pi \left(\frac{(a+b)^5}{20} - \frac{a^5}{20} - \frac{a^4 b}{4} \right) = \pi \left(\frac{ab^4}{2} + a^2 b^3 + a^3 b^2 + \frac{b^5}{10} \right).
\end{aligned}
$$

2. Bestimmen Sie das Volumen der Eistüte, welche durch den Kegel $x^2 + y^2 = 3z^2$ und die Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ beschränkt wird und sich oberhalb der xy-Ebene befindet.

Lösung: $V = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3z^2\}$

Bitte wenden!



Die beiden Flächen treffen sich bei

$$3z^2 = x^2 + y^2 = 1 - z^2 \quad \Rightarrow \quad 4z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad z = \pm\frac{1}{2}.$$

Variante mit Kugelkoordinaten $(x, y, z) = (\varrho\cos\varphi\sin\theta, \varrho\sin\varphi\sin\theta, \varrho\cos\theta)$:

$$\begin{aligned}|V| &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varrho^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi d\varrho = 2\pi \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^1 [-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 2\pi\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Variante mit Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z)$: Setze

$$\begin{aligned}V_1 &= \{(x, y, z) \,|\, 0 \le z \le \frac{1}{2}, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \varrho \le \sqrt{3}\,z\} \\ V_2 &= \{(x, y, z) \,|\, \frac{1}{2} \le z \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \varrho \le \sqrt{1 - z^2}\}\end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned}|V_1| &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}\,z} \varrho \, d\varrho d\varphi dz = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} 3z^2 \, dz = \frac{\pi}{8} \\ |V_2| &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \varrho \, d\varrho d\varphi dz = \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - z^2) \, dz = \pi\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 8}\right)\right) = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{7}{3\cdot 8}\right) \\ |V| &= \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{7}{3\cdot 8} + \frac{1}{8}\right) = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3\cdot 8}\right) = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

3. Es sei $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ein Vektorfeld. Die Divergenz $\operatorname{div}\vec{v}$ ist definiert als

$$\operatorname{div}\vec{v}(x, y, z) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z) = \nabla \cdot \vec{v}(x, y, z)$$

Siehe nächstes Blatt!

und die Rotation $\operatorname{rot} \vec{v}$ als

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} = \nabla \times \vec{v}(x,y,z),$$

wobei $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$ den Nabla-Operator bezeichnet.

a) Beweisen Sie die Identität $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$.

b) Zeigen Sie weiters: Ist f eine Funktion, so ist

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f,$$

wobei (wie bekannt) $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ ist.

c) Beweisen Sie die Identität

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) Wir schreiben $\frac{\partial v_i}{\partial x} = \partial_x v_i$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix}& \\
&= \partial_x(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) + \partial_y(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) + \partial_z(\partial_x v_2 - \partial_y v_1) \\
&= \frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z} = 0.
\end{aligned}$$

b) $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} = \partial_x(\partial_x f) + \partial_y(\partial_y f) + \partial_z(\partial_z f) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$

c)

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix}& \\
&= \begin{pmatrix} \partial_y(\partial_x v_2 - \partial_y v_1) - \partial_z(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) \\ \partial_z(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) - \partial_x(\partial_x v_2 - \partial_y v_1) \\ \partial_x(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) - \partial_y(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_y \partial_x v_2 - \partial_y \partial_y v_1 - \partial_z \partial_z v_1 - \partial_z \partial_x v_3 + (\partial_x \partial_x v_1 - \partial_x \partial_x v_1) \\ \partial_z \partial_y v_3 - \partial_z \partial_z v_2 - \partial_x \partial_x v_2 - \partial_x \partial_y v_1 + (\partial_y \partial_y v_2 - \partial_y \partial_y v_2) \\ \partial_x \partial_z v_1 - \partial_x \partial_x v_3 - \partial_y \partial_y v_3 - \partial_y \partial_z v_2 + (\partial_z \partial_z v_3 - \partial_z \partial_z v_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3) \\ \partial_y(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3) \\ \partial_z(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x v_1 + \partial_y \partial_y v_1 + \partial_z \partial_z v_1 \\ \partial_x \partial_x v_2 + \partial_y \partial_y v_2 + \partial_z \partial_z v_2 \\ \partial_x \partial_x v_3 + \partial_y \partial_y v_3 + \partial_z \partial_z v_3 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

4. **a)** Es sei $\vec{v}(x,y,z) = (z-y, x+z, -x-y)$. Berechnen Sie $\operatorname{div}\vec{v}$ und $\operatorname{rot}\vec{v}$.

b) Es sei $\vec{v}(x,y,z) = (3y, -xz, yz^2)$. Berechnen Sie $\operatorname{div}\vec{v}$ und $\operatorname{rot}\vec{v}$.

c) Zeigen Sie, dass für zwei differenzierbare Vektorfelder $\vec{w_1}$ und $\vec{w_2}$ gilt:

$$\operatorname{div}(\vec{w_1} \times \vec{w_2}) + \vec{w_1} \cdot \operatorname{rot}\vec{w_2} = \vec{w_2} \cdot \operatorname{rot}\vec{w_1}.$$

Lösung:

a) $\operatorname{div}\vec{v}(x,y,z) = 0$ und $\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = (-2,2,2)$.

b) $\operatorname{div}\vec{v}(x,y,z) = 2yz$ und $\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = (z^2+x, 0, -z-3)$.

c) Es seien $\vec{w}_1 = (w_{11}, w_{12}, w_{13})$ und $\vec{w}_2 = (w_{21}, w_{22}, w_{23})$. Die linke Seite ist dann gleich

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\begin{pmatrix} w_{12}w_{23} - w_{22}w_{13} \\ w_{13}w_{21} - w_{11}w_{23} \\ w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ w_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (w_{23})_y - (w_{22})_z \\ (w_{21})_z - (w_{23})_x \\ (w_{22})_x - (w_{21})_y \end{pmatrix} \\
&\quad = (w_{12})_x w_{23} - w_{22}(w_{13})_x + (w_{13})_y w_{21} - (w_{11})_y w_{23} + (w_{11})_z w_{22} - (w_{12})_z w_{21},
\end{aligned}$$

die rechte gleich

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} w_{21} \\ w_{22} \\ w_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (w_{13})_y - (w_{12})_z \\ (w_{11})_z - (w_{13})_x \\ (w_{12})_x - (w_{11})_y \end{pmatrix} \\
&\quad = (w_{12})_x w_{23} - w_{22}(w_{13})_x + (w_{13})_y w_{21} - (w_{11})_y w_{23} + (w_{11})_z w_{22} - (w_{12})_z w_{21}.
\end{aligned}$$

5. **a)** Gibt es ein Vektorfeld $\vec{v}$ mit $\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = (x,y,z)$?

b) Gibt es ein Vektorfeld $\vec{w}$, für das

$$\operatorname{rot}\vec{w} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

gilt?

Lösung:

a) Nein, da $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = 3 \neq 0$ ist.

b) Ja. Ein mögliches Vektorfeld ist

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$