Lösung - Serie 15

1. Der Wert einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fällt am schnellsten in die Richtung

(a) der minimalen partiellen Ableitung.

(b) entgegengesetzt zur maximalen partiellen Ableitung.

(c) des Gradienten.

√ (d) entgegengesetzt zum Gradienten.

(e) orthogonal zum Gradienten.

Die Frage ist äquivalent dazu, für welchen Einheitsvektor e die Richtungsableitung $D_e f$ am kleinsten, das heisst, am meisten negativ ist. Die Richtungsableitung ist aber gleich $(\nabla f) \cdot e$, und dies wird am kleinsten für $e = -\nabla f \,/\, |\nabla f|$. Die richtige Antwort lautet daher (d).

2. Gegeben ist die Funktion $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Oberflächen von Kugeln mit Mittelpunkt O oder die Menge $\{(0, 0, 0)\}$.

(b) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Ebenen senkrecht zum Vektor $(1, 3, 1)$.

√ (c) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Oberflächen von Ellipsoiden mit Mittelpunkt O oder die Menge $\{(0, 0, 0)\}$.

Die Niveaufläche von f zum Niveau C ist die Menge

$$N_C(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = C\}.$$

Für $C \in \mathbb{R}^+_*$ ist also ein Ellipsoid mit Mittelpunkt O, für $C = 0$ ist die Menge $\{(0, 0, 0)\}$, und sonst ist die leere Menge.

3. Bestimmen Sie jene Tangentialebenen an das Ellipsoid

$$2x^2 + 2y^2 + \frac{1}{4}\,z^2 = 1,$$

welche parallel zur Ebene $x + y + z = 1$ sind.

(a) $x + y + z = 0$.

(b) $x + y + z = k$, für $k \in \{\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\}$.

√ (c) $x + y + z = k$, für $k \in \{\pm\sqrt{5}\}$.

(d) $x + y + z = k$, für $k \in \{\pm 1\}$.

Wir suchen die Punkte auf dem Ellipsoid, bei denen der Gradient parallel zum Normalenvektor $(1, 1, 1)$ der Ebene ist. Setzen wir

$$f(x, y, z) := 2x^2 + 2y^2 + \frac{z^2}{4},$$

so müssen wir also

$$\textbf{grad}\, f(x, y, z) = \left(4x, 4y, \frac{z}{2}\right) = a\,(1, 1, 1)$$

mit einer reellen Zahl a verlangen. Es folgt, dass

$$x = y = \frac{a}{4}\ ,\ z = 2a$$

ist. Einsetzen in die Gleichung des Ellipsoiden führt dann zu

$$1 = f(x, y, z) = \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{8} + a^2 = \frac{5}{4}\,a^2 \quad \Longrightarrow \quad a_\pm = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Die gesuchten Tangentialebenen müssen die Gleichung $x + y + z = b$ mit $b \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit sie parallel zur Ebene $x + y + z = 1$ sind. Da sie die Punkte

$$(x, y, z) = \left(\frac{a_+}{4}, \frac{a_+}{4}, 2a_+\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

bzw.

$$(x, y, z) = \left(\frac{a_-}{4}, \frac{a_-}{4}, 2a_-\right) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

enthalten müssen, finden wir durch Einsetzen die Werte $b_\pm = \pm\sqrt{5}$. Die Tangentialebenen sind also

$$x + y + z = \sqrt{5} \quad \text{und} \quad x + y + z = -\sqrt{5}.$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y + z^3$ an der Stelle $(1, 2, 2)$ in Richtung des Vektors $(4, 4, 2)$.

(a) $\dfrac{34}{3}$

(b) 36

$\surd$ (c) 6

(d) $(2, 1, 12)$

(e) $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 4)$

Der Betrag des Vektors $(4, 4, 2)$ ist $\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$; der zugehörige Einheitsvektor ist daher $e := (4, 4, 2)/6 = (2, 2, 1)/3$. Der Gradient $\nabla f(x, y, z) = (2x, 1, 3z^2)$ hat im Punkt $(1, 2, 2)$ den Wert $(2, 1, 12)$. Somit ist die fragliche Richtungsableitung $D_e f(1, 2, 2) = (2, 1, 12) \cdot (2, 2, 1)/3 = (2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 12 \cdot 1)/3 = 6$. Also ist (c) die richtige Antwort.

5. Die Richtungsableitung der Funktion $f:\ (x,y) \mapsto \arctan(x/y)$ an der Stelle $(-3,3)$ in die Richtung des Vektors $(3,4)$ lautet:

√ (a) $\frac{7}{30}$.

(b) $\frac{7}{6}$.

(c) -$\frac{21}{5}$.

(d) -$\frac{21}{25}$.

Die Antwort lautet (a). Für alle $x \neq y$ gilt, dass

$$\textbf{grad}\ f(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right)$$

ist. Nach Normierung des Vektors $(3,4)$ erhalten wir den Einheitsvektor $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Somit ist die gesuchte Richtungsableitung

$$\begin{aligned} Df_{\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)}(-3,3) &= \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \cdot \textbf{grad}\ f(-3,3) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{(-3)^2+3^2}, \frac{-(-3)}{(-3)^2+3^2} \right) \\ &= \frac{1}{90}(3,4)\cdot(3,3) = \frac{7}{30}. \end{aligned}$$

6. Finde und klassifiziere die Extremalstellen der Funktion

$$f(x,y) = 3y^2 - 1 - 2x^2$$

im Bereich

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 4 \right\}.$$

Lösung: Für Extremalstellen im Innern des Gebiets B gilt $\textbf{grad}\, f(x,y) = (0,0)$, also

$$\textbf{grad}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} -4x \\ 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0 \text{ und } y = 0.$$

Für Punkte auf dem Rand wählt man eine Parameterdarstellung des Randes ∂B

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$$

und erhält für die Funktion auf dem Rand

$$f|_{\partial B} = f\big(\vec{r}(t)\big) = 12\sin^2 t - 1 - 8\cos^2 t = 20\sin^2 t - 9.$$

Für die Extremalstellen auf dem Rand gilt dann

$$\frac{d}{dt} 20\sin^2 t - 9 = 40\sin t\,\cos t = 20\sin(2t) = 0 \iff t \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

Man erhält also folgende Kandidatenliste für die Extremalpunkte:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
(x,y)	$(0,0)$	$(2,0)$	$(0,2)$	$(-2,0)$	$(0,-2)$
$f(x,y)$	-1	-9	11	-9	11

Das Minimum beträgt -9 und wird auf dem Rand in den Punkten $(\pm 2, 0)$ angenommen. Das Maximum beträgt 11 und wird auf dem Rand in den Punkten $(0, \pm 2)$ angenommen.

Siehe nächstes Blatt!

7. Sei

a) $z(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ und $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$.

b) $z(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ und $x(t) = e^{-t}$, $y(t) = e^t$.

Berechne die Ableitung $\frac{dz}{dt}$ durch die verallgemeinerte Kettenregel. Prüfe dein Resultat durch explizites Ableiten von $z(x(t), y(t))$ nach t.

Lösung:

Die partiellen Ableitungen von $z(x, y)$ sind $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = 10y + 3x$. Also erhalten wir für

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial z}{\partial y}\dot{y}(t) \\
&= (2x(t) + 3y(t))\dot{x}(t) + (10y(t) + 3x(t))\dot{y}(t) \\
&= 2\sin(t)\cos(t) + 3\cos^2(t) - 10\cos(t)\sin(t) - 3\sin^2(t) \\
&= 3 - 6\sin^2(t) - 8\sin(t)\cos(t) && \mid \text{da } \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t) \\
&= 3 - 6\sin^2(t) - 4\sin(2t).
\end{aligned}$$

Ohne die Kettenregel: $z(t) = z\big(x(t), y(t)\big) = \sin^2(t) + 3\sin(t)\cos(t) + 5\cos^2(t)$ und erhalten für $\frac{dz}{dt} = 2\sin(t)\cos(t) + 3\cos^2(t) - 3\sin^2(t) - 10\sin(t)\cos(t) = 3 - 6\sin^2(t) - 4\sin(2t)$.

Die partiellen Ableitungen von $z(x, y)$ sind $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$. Also erhalten wir für

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial z}{\partial y}\dot{y}(t) \\
&= \frac{2x(t)}{x^2(t) + y^2(t)}\dot{x}(t) + \frac{2y(t)}{x^2(t) + y^2(t)}\dot{y}(t) \\
&= 2\frac{-e^{-2t} + e^{2t}}{e^{-2t} + e^{2t}} && \mid \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2},\ \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\
&= 2\frac{\sinh(2t)}{\cosh(2t)}.
\end{aligned}$$

Ohne die Kettenregel: $z(t) = z\big(x(t), y(t)\big) = \ln(e^{2t} + e^{-2t}) = \ln(2\cosh(2t))$ und erhalten, da $\dot{\cosh}(t) = \sinh(t)$, für $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2\cosh(2t)} 4\sinh(2t) = 2\frac{\sinh(2t)}{\cosh(2t)}$.

8. Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion

$$f : (x, y) \longmapsto \frac{1}{1 + x - y}$$

im Punkt $P = (0, 0, 1)$?

Lösung: Der Graph der Funktion f ist die Niveaufläche zu $g(x, y, z) = f(x, y) - z$ zum Wert 0. Damit ist die Tangentialebene in $(0, 0, 1)$ beschrieben durch:

$$g_x(0, 0, 1)(x - 0) + g_y(0, 0, 1)(y - 0) + g_z(0, 0, 1)(z - 1) = 0,$$

wobei

$$g_x = \frac{-1}{(1 + x - y)^2},\ g_y = \frac{1}{(1 + x - y)^2},\ g_z = -1.$$

Bitte wenden!

Daher muß $(-1)x + 1 \cdot y + (-1)(z-1) = 0$ gelten.

$$\Rightarrow -x + y - z + 1 = 0.$$

9. Eine Funktion von drei Variablen $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ besitzt im Ursprung in den drei Richtungen

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{b} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), \quad \mathbf{c} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

die Richtungsableitungen

$$D_{\mathbf{a}}f(\mathbf{0}) = 3\,, \quad D_{\mathbf{b}}f(\mathbf{0}) = -2\,, \quad D_{\mathbf{c}}f(\mathbf{0}) = 5\,.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Niveaufläche von f im Ursprung.

Lösung: Die Richtungsableitung in Richtung $\mathbf{a}$ berechnet sich

$$D_{\mathbf{a}}f = \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{a},$$

wobei $\mathbf{a}$ ein Einheitsvektor sein muss. Dies führt in unserem Fall zu einem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{a}}f(\mathbf{0}) &= 3 = f_x(\mathbf{0}) \\ D_{\mathbf{b}}f(\mathbf{0}) &= -2 = \frac{3}{5}f_x(\mathbf{0}) + \frac{4}{5}f_y(\mathbf{0}) \\ D_{\mathbf{c}}f(\mathbf{0}) &= 5 = -\frac{2}{3}f_x(\mathbf{0}) + \frac{1}{3}f_y(\mathbf{0}) + \frac{2}{3}f_z(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

für die Komponenten von $\mathbf{grad} f(\mathbf{0})$.
Die Lösung lautet $\mathbf{grad} f(\mathbf{0}) = (3, -\frac{19}{4}, \frac{103}{8})$. Daher lautet die Gleichung der Tangentialebene in $\mathbf{0}$

$$3x - \frac{19}{4}y + \frac{103}{8}z = 0.$$