Lösung - Serie 26

1. Es ist das folgende autonome System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 + 3\\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2\end{aligned}$$

von linearen Differenzialgleichungen 1. Ordung gegeben. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Es gibt keinen Gleichgewichtspunkt.

(b) $(0, 0)$ ist Gleichgewichtspunkt.

√ (c) $(1, -2)$ ist Gleichgewichtspunkt.

(d) $(-1, 2)$ ist Gleichgewichtspunkt.

Wir setzen zugehörige Vektorfeld $v(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2 + 3, 2x_1 + x_2)$ gleich Null, um die Gleichgewichtspunkte zu erhalten (siehe Stammbach, Kap. VII.12, p.106). Das ergibt $x_1 + 2x_2 + 3 = 0$ und $2x_1 + x_2 = 0$, also $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$. Das DGL-System entspricht genau den Feldlinien von v, die durch $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = v(x_1, x_2)$ gegeben sind. Deshalb ist $(x_1, x_2) = (1, -2)$ eine konstante Feldlinie und damit ein Gleichgewichtspunkt.

Bitte wenden!

2. Betrachten Sie das folgende System

$$\begin{cases} \dot{x} = bx - y \\ \dot{y} = x - by. \end{cases}$$

Für $b = 1$ ist die Lösung zu den Anfangsbedingungen $x(0) = 1, y(0) = 0$ gleich...
(*Hinweis*: Betrachten Sie $u(t) = x(t) + y(t)$, $v(t) = x(t) - y(t)$.)

(a) $x(t) = e, y(t) = te^t$

√ (b) $x(t) = t + 1, y(t) = t$

(c) $x(t) = t, y(t) = t$

(d) $x(t) = e^t, y(t) = te^t$

Es gilt

$$\begin{array}{ll} (I) & u = x + y \\ (II) & v = x - y \end{array} \text{ (Hinweis)} \Longrightarrow \begin{array}{ll} (I) + (II): & x = \frac{1}{2}(u + v) \\ (I) - (II): & y = \frac{1}{2}(u - v) \end{array} \tag{1}$$

Es folgt

$$\begin{array}{l} \dot{x} = bx - y \\ \dot{y} = x - by \end{array} \overset{b=1}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x - y \end{array}$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \begin{array}{ll} (III) & \frac{1}{2}(\dot{u} + \dot{v}) = v \\ (IV) & \frac{1}{2}(\dot{u} - \dot{v}) = v \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ll} (III) + (IV): & \dot{u} = 2v \\ (III) - (IV): & \dot{v} = 0 \end{array}$$

Somit ist

$$v(t) = C \ , \ C \in \mathbb{R} \quad \text{und} \ \ \dot{u} = 2C \ \text{, also} \ \ u(t) = 2Ct + D \ , \ D \in \mathbb{R}$$

Aus (1) folgt

$$x(t) = \frac{1}{2}[2Ct + D + C] = Ct + \frac{D + C}{2} \ \text{ und } \ y(t) = \frac{1}{2}[2Ct + D - C] = Ct + \frac{D - C}{2}$$

Mit den Anfangsbedingungen erhalten wir

$$1 = x(0) = \frac{D + C}{2} \ \text{ und } \ 0 = y(0) = \frac{D - C}{2} \Longrightarrow D = 1 = C$$

Also

$$x(t) = t + 1 \ \text{ und } \ y(t) = t \tag{2}$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Für die Lösung $(x(t), y(t))$ des Systems

$$\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = 4\,x, \\ \dot{x} - \dot{y} = 6\,y, \end{cases}$$

welche die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ erfüllt, gilt

(a) $x(1) + y(1) = 2e^3$.

√ (b) $2x(1) + y(1) = 2e^3$.

(c) $x(1) + 2y(1) = 2e^3$.

(d) $x(1) + y(1) = e^3$.

Dieses System kann geschrieben werden als

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} + \dot{y} & = & 4x \\ \dot{x} - \dot{y} & = & 6y \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} 2\dot{x} & = & 4x + 6y \\ 2\dot{y} & = & 4x - 6y \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2x + 3y \\ \dot{y} & = & 2x - 3y \end{array} \Longleftrightarrow \dot{z} = Az = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} z,$$

wobei $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Wir berechnen die Eigenwerte λ_1 bzw. λ_2 und die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ von A. Es gilt

$$0 = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda - 3)\,.$$

Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 3$. Die zugehörigen Eigenvektoren berechnen sich aus

$$(A - \lambda_1 I_2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow b = -2a, \text{ und}$$

$$(A - \lambda_2 I_2) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = 3d.$$

Damit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 und $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_2. Da die EW voneinander verschieden sind, erhalten wir zwei linear unabhängige Lösungen von $\dot{z} = Az$

$$z_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4t} \quad \text{und} \quad z_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Bitte wenden!

Es folgt, dass die allgemeine Lösung von $\dot{z} = Az$ gegeben ist durch

$$z(t) = \alpha z_1(t) + \beta z_2(t) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4t} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t},$$

oder

$$x(t) = \alpha e^{-4t} + 3\beta e^{3t} \quad \text{und} \quad y(t) = -2\alpha e^{-4t} + \beta e^{3t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Mit den Anfangsbedingungen bestimmen wir die Konstanten α und β

$$\begin{array}{rcl} x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & 0 \end{array} \iff \begin{array}{rcl} 1 & = & \alpha + 3\beta \\ 0 & = & -2\alpha + \beta \end{array}.$$

Es folgt, dass $\alpha = \frac{1}{7}$ und $\beta = \frac{2}{7}$. Also

$$x(t) = \frac{1}{7}e^{-4t} + \frac{6}{7}e^{3t} \quad \text{und} \quad y(t) = -\frac{2}{7}e^{-4t} + \frac{2}{7}e^{3t}.$$

Mit Einsetzen folgt die richtige Antwort $2x(1) + y(1) = 2e^3$.

4. $(*)$ Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, so dass im folgenden System $(0,0)$ ein Gleichgewichts punkt ist:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \frac{1}{4}y \\ \dot{y} = sx - y. \end{cases}$$

(a) $s \leq 0$

√ (b) $s \leq 4$

(c) $0 \leq s \leq 4$

Da $x(t) = 0$ und $y(t) = 0$ eine konstante Lösung unseres Systems ist für alle $s \in \mathbb{R}$, ist $(0,0)$ ein Gleichgewichtspunkt unseres Systems. Es bleibt $s \in \mathbb{R}$ zu finden, so dass $(0,0)$ stabil ist. Wir können das System folgendermassen schreiben

$$\dot{u}(t) = Au(t) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ s & -1 \end{pmatrix} u(t), \text{ mit } u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A

$$0 = \det(A - \lambda E_2) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & \frac{1}{4} \\ s & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - \frac{1}{4}s.$$

Damit sind die Eigenwerte gegeben durch

$$\lambda_1 = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{s} \text{ und } \lambda_2 = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{s}.$$

Nach Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite $116(1.)$ und Seite $120(4.3)$ gilt: Der Punkt $(0,0)$ ist stabil, falls $\operatorname{Re}(\lambda_1) \leq 0$ und $\operatorname{Re}(\lambda_2) \leq 0$. In unserem Fall ist $\operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Sei nun $s \leq 0$, dann ist $\operatorname{Re}(\lambda_1) = -1 < 0$. Falls $s > 0$, dann ist $\operatorname{Re}(\lambda_1) = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{s} \leq 0$ genau dann, wenn $s \leq 4$. Also gilt insgesamt $\operatorname{Re}(\lambda_1) \leq 0$ für $s \leq 4$. Damit ist für $s \leq 4$ der Punkt $(0,0)$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt unseres Systems.

Siehe nächstes Blatt!

5. Welche der folgenden Aussagen über die Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$$

sind korrekt?

√ (a) Für eine Potenzreihe $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, die die Gleichung löst, gilt $(n+2)a_{n+2} + a_n = 0$ für $n \geq 0$.

(b) Die eindeutige Lösung mit $y(0) = 0, y'(0) = 1$ ist eine gerade Funktion, dh. $y(-x) = y(x)$.

√ (c) Die eindeutige Lösung mit $y(0) = 1, y'(0) = 0$ ist $y(x) = e^{-x^2/2}$.

(d) Jede Lösung y erfüllt entweder $y(-x) = y(x)$ oder $y(-x) = -y(x)$.

Mit dem Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ergibt sich

$$\begin{aligned} xy'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir den Index n durch $n+2$ ersetzt.

Addiert man diese Gleichungen, ergibt sich

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n(n+1))x^n = 0.$$

Es folgt $(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n(n+1) = 0$ für $n \geq 0$. Da $n+1 \neq 0$ gilt also $(n+2)a_{n+2} + a_n = 0$.

Eine Potenzreihe $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist eine gerade Funktion genau dann wenn alle a_n für n ungerade verschwinden. Die Bedingung $y'(0) = 1 = a_1$ schliesst diesen Fall schon aus. Tatsächlich sieht man, dass wegen $y(0) = 0 = a_0$ gerade $2a_2 + a_0 = 0$, also $a_2 = 0$, und $4a_4 + a_2 = 0$, also $a_4 = 0$ und so weiter. Es gilt also, dass alle a_n für n gerade verschwinden, also ist diese Lösung eine ungerade Funktion.

Durch Ableiten und Einsetzen sieht man leicht, dass $y(x) = e^{-x^2/2}$ eine Lösung mit $y(0) = 1, y'(0) = 0$ ist.

Die eindeutige Lösung y mit $y(0) = 1, y'(0) = 1$ ist weder gerade noch ungerade, denn es verschwinden weder alle a_n mit n gerade noch alle a_n mit n ungerade.

Bitte wenden!

6. Die folgende Differentialgleichung beschreibt die Funktion $t \to \varphi(t)$ der Winkelverschiebung eines Pendels:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi) = 0, \tag{3}$$

wobei g die Erdanziehung und ℓ die Länge des Pendels bezeichnen. Approximieren wir $\sin(\varphi)$ durch φ, so erhalten wir die folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0 \tag{4}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

√ (a) (4) ist die Differentialgleichung einer ungedämpften Schwingung.

√ (b) Die Lösung von (4) mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ ist periodisch und die Periode ist unabhängig von φ_0.

(c) Jede Lösung von (4) ist periodisch und die Periode ist unabhängig von ℓ.

√ (d) Die Lösungen von (3) und (4) mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ gleichen einander mehr wenn $\varphi_0 = \pi/100$ als wenn $\varphi_0 = \pi/2$ ist.

Die Gleichung (4) kann auch als

$$\ddot{\varphi} + 2\lambda\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$

angeschrieben werden, wobei $\lambda = 0$ und $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} > 0$ gilt. Da $\lambda < \omega$, beschreibt die Gleichung (4) tatsächlich eine ungedämpfte Schwingung (siehe Seite 92 von Kapitel 7 im Stammbach). Somit ist (a) korrekt.

Bezüglich (b) und (c) ist es wahr, dass die Lösung zu (4) periodisch ist und die Periode unabhängig von φ_0 ist, aber falsch dass die Periode unabhängig von ℓ ist. Gleichung (4) hat dieselbe Form wie Gleichung (11.3) auf Seite 91 von Kapitel 7 im Stammbach (mit $\lambda = 0$ und $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$). Aus Gleichung (11.7) desselben Kapitels folgt nun, dass die allgemeine Lösung durch

$$\varphi(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)$$

gegeben ist. Die Periode der Funktionen $\cos(t)$ und $\sin(t)$ beträgt jeweils 2π, woraus folgt, dass die Periode von $\varphi(t)$ gleich $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ ist. Somit ist klar, dass die Periode von φ_0 unabhängig und von ℓ abhängig ist.

Allgemein gesprochen sind die Lösungen von (3) und (4) mit denselben Anfangsbedingungen einander dann ähnlicher, wenn die maximale Winkelverschiebung klein ist. Eine einfache, aber nicht rigorose, Begründung dieses Umstandes ist, dass die Approximation von $\sin(\varphi)$ durch φ genauer ist, wenn φ klein ist (denke an die Taylorentwicklung von $\sin(\varphi)$).

Wir werden nicht formal beweisen, dass (d) korrekt ist, aber wir werden einige starke Argumente präsentieren, dass dem so ist. Dazu analysieren wir die Taylorentwicklung der Lösung $\varphi_1(t)$ von (3) mit $\varphi_1(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}_1(0) = 0$ und die Lösung $\varphi_2(t)$ von (4) mit $\varphi_2(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}_2(0) = 0$. Wir schreiben

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Siehe nächstes Blatt!

und

$$\varphi_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

Wir haben oben bereits die allgemeine Lösung von (4) bestimmt. Die eindeutige Lösung, die den Anfangsbedingungen genügt, ist

$$\varphi_2(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right).$$

Aus der Taylorentwicklung des Kosinus folgt

$$b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = 0$$

und

$$b_{2k} = \varphi_0 \left(\frac{g^k(-1)^k}{\ell^k(2k)!}\right), \quad \text{for } k \geq 0. \tag{5}$$

Nun analysieren wir die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und argumentieren, dass diese den Koeffizienten $b_0, b_1, b_2, \ldots$ dann ähnlicher sind, wenn φ klein ist. Zunächst erkennen wir, dass $a_0 = b_0 = \varphi_0$ gilt, da $\varphi_1(0) = \varphi_0$ ist. Leiten wir φ_1 ab, so erhalten wir

$$\dot{\varphi}_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n t^{n-1}.$$

Setzen wir die zweite Anfangsbedingung in diesen Ausdruck ein, so finden wir $a_1 = b_1 = 0$. Leiten wir ein weiteres Mal ab, so erhalten wir

$$\ddot{\varphi}_1(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n t^{n-2}.$$

Aus Gleichung (3) folgt

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n t^{n-2}\right) + \frac{g}{\ell} \sin\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) = 0.$$

Da

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ist, folgt

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n t^{n-2}\right) + \frac{g}{\ell} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)^{2k+1} = 0. \tag{6}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung gleich Null ist, muss der Koeffizient von t^n für jedes $n \geq 0$ ebenfalls gleich Null sein. Wir analysieren diese Koeffizienten nun.

Als Aufwärmübung beweisen wir $a_n = 0$ für jedes ungerade $n \geq 1$ durch vollständige Induktion. Die Induktionsbasis $n = 1$ ist erfüllt, wir wir schon oben gesehen haben. Für ein ungerades $n \geq 3$ ist der Koeffizient von t^{n-2} in der ersten Summe von (6) gleich

$$n(n-1)a_n.$$

Die zweite Summe von (6) ist komplizierter. Erweitern wir die Terme, so sehen wir, dass der Koeffizient von t^{n-2} gleich $\frac{g}{\ell}$ multipliziert mit der Summe über alle k von $\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ mal der Summe über alle Folgen

Bitte wenden!

$(n_1, \ldots, n_{2k+1})$ mit $n_1 + \cdots + n_{2k+1} = n - 2$ von $a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_{2k+1}}$ ist. Die wichtige Beobachtung ist nun, dass zumindest eine der Zahlen $n_1, \ldots, n_{2k+1}$ ungerade sein muss, da auch $n - 2$ ungerade ist. Ausserdem ist jedes der Folgenglieder höchstens $n - 2$, da deren Summe $n - 2$ ist. Aus der Induktionsannahme folgt nun, dass zumindest eine der Zahlen $a_{n_1}, \ldots, a_{n_{2k+1}}$ gleich Null sein muss. Folglich ist das Produkt $a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_{2k+1}}$ immer gleich 0. Aus (6) folgt nun $n(n-1)a_n = 0$, also $a_n = 0$.

Somit sind die ersten zwei und alle ungerade indexierten Koeffizienten in den Taylorentwicklungen von φ_1 und φ_2 ident. Schliesslich analysieren wir noch die Terme $a_2, a_4, a_6, \ldots$. Wir werden diese Koeffizienten nicht exakt bestimmen, da dies zu kompliziert wäre. Wir werden aber zeigen, dass für jedes feste $n \geq 1$ gilt:

$$a_{2n} = \frac{g^n (-1)^n \sin(\varphi_0) \cos^{n-1}(\varphi_0)}{\ell^n (2n)!} + f_n(\varphi_0), \tag{7}$$

wobei $f_n(\varphi_0) = o(\varphi_0)$, da $\varphi_0 \to 0$. Da $\sin(x) \sim x$ für kleine x und auch $\cos(x) \sim 1$ für kleine x, legt dies nahe, dass die Koeffizienten von φ_2 denen von φ_1 (gegeben in (5)) sehr ähnlich sind. Dies ist aber dennoch kein rigoroser Beweis, dass (d) korrekt ist.

Um (7) zu beweisen, betrachten wir ein $n \geq 1$ und beobachten, dass der Koeffizient von t^{2n-2} in der ersten Summe von (6) gleich $(2n)(2n-1)a_{2n}$ ist. Erweitern wir die Terme der zweiten Summe von (6), so sehen wir, dass der Koeffizient von t^{2n-2} gleich $\frac{g}{\ell}$ multipliziert mit der Summe über alle k von $\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ mal der Summe über alle Folgen $(n_1, \ldots, n_{2k+1})$ mit $n_1 + \cdots + n_{2k+1} = 2n - 2$ von $a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_{2k+1}}$ ist. Falls eine der Zahlen $n_1, \ldots, n_{2k+1}$ ungerade ist, so ist das Produkt gleich Null. Betrachten wir nun den Fall, dass genau eine der Zahlen $n_1, \ldots, n_{2k+1}$ gleich $2n-2$ ist und die anderen alle gleich Null sind. Der Beitrag zum Koeffizient von t^{2n-2} von Termen dieser Art ist

$$\frac{g}{\ell} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} (2k+1) a_{2n-2} a_0^{2k} = \frac{g}{\ell} a_{2n-2} \cos(\varphi_0),$$

da $a_0 = \varphi_0$. Per Induktion folgt (wir substituieren (7) für a_{2n-2}), dass diese Terme genau

$$\frac{g^n (-1)^{n-1} \sin(\varphi_0) \cos^{n-1}(\varphi_0)}{\ell^n (2n-2)!} + \left(\frac{g}{\ell}\right) f_{n-1}(\varphi_0) \cos(\varphi_0)$$

beitragen. Nun ist es nicht schwer zu sehen, dass sich der Beitrag von anderen Folgen $(n_1, \ldots, n_{2k+1})$ auf höchstens einer Konstante mal $\sin^2(\varphi_0)$ beläuft, was gleich $o(\varphi_0)$ ist, da $\varphi_0 \to 0$; wir lassen die Details aus. Setzen wir nun den Koeffizienten von t^{2n-2} in (6) gleich Null, erhalten wir, dass (7) wie gewünscht gilt.

7. Man löse die Differentialgleichungssysteme

a) $$\begin{cases} \dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= -x - 3y \\ x(0) &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dot{x} &= -7x + 4y \\ \dot{y} &= -9x + 5y + e^{-t} \\ x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \dot{x} &= 2x - y \\ \dot{y} &= x + 2y \end{cases}$$

Siehe nächstes Blatt!

Lösung:

a) Das System kann man schreiben als

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} z = Az \quad \text{für } z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt die Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{x} - (\mathrm{spur}(A))\,\dot{x} + (\det(A)) = \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser homogenen, linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten lautet

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2.$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}.$$

Aus der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ folgt $C_1 = 0$. Einsetzen liefert für $y(t)$

$$y(t) = \dot{x} + x = (C_2 - 2C_2 t)e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} = (C_2 - C_2 t)e^{-2t}.$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ folgt noch $C_2 = 1$. Die gesuchte Lösung lautet daher

$$x(t) = te^{2t} \qquad y(t) = (1 - t)e^{-2t}.$$

b) Aus der ersten Gleichung erhält man $y = \frac{1}{4}\dot{x} + \frac{7}{4}x$ und durch ableiten $\dot{y} = \frac{1}{4}\ddot{x} + \frac{7}{4}\dot{x}$. Diese beiden Terme in der zweiten Gleichung eingesetzt, ergibt

$$\frac{1}{4}\ddot{x} + \frac{7}{4}\dot{x} = -9x + \frac{5}{4}\dot{x} + \frac{35}{4}x + e^{-t} \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 4e^{-t}.$$

Das charakteristische Polynom dieser linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten lautet

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2.$$

Die allgemeine homogene Lösung lautet daher

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t}.$$

Für die partikuläre Lösung macht man den Ansatz $x(t) = At^2 e^{-t}$, da -1 doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert $A = 2$. Die allgemeine Lösung ist dann

$$x(t) = (C_1 + C_2 t + 2t^2)e^{-t}.$$

Die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ liefert $C_1 = 0$. Durch Einsetzen erhält man für $y(t)$

$$y(t) = \frac{1}{4}\dot{x} + \frac{7}{4}x = \frac{1}{4}\big(C_2 + (4 - C_2)t - 2t^2\big)e^{-t} + \frac{7}{4}\big(C_2 t + 2t^2\big)e^{-t} = \Big(\frac{C_2}{4} + (1 + \frac{3C_2}{2})t + 3t^2\Big)e^{-t}.$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ folgt $C_2 = 0$. Die gesuchte Lösung lautet daher

$$x(t) = 2t^2 e^{-t} \qquad y(t) = (t + 3t^2)e^{-t}.$$

Bitte wenden!

c) Das System kann man schreiben als

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} z = Az \quad \text{für } z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt die Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{x} - (\mathrm{spur}(A))\,\dot{x} + (\det(A)) = \ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser homogenen, linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten lautet

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i).$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$x(t) = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Aus der ersten Gleichung ist

$$\begin{aligned} y(t) &= 2x(t) - \dot{x}(t) = 2e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) - 2e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) - e^{2t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) \\ &= e^{2t}(C_1 \sin t - C_2 \cos t). \end{aligned}$$

8. Für folgende Differentialgleichungssysteme bestimme man das Phasenporträt. Man erstelle eine Skizze inklusive des Durchlaufsinns der Kurven.

a) $\begin{cases} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= x^2 + y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dot{x} &= 2x \\ \dot{y} &= \frac{x}{y} \end{cases}$

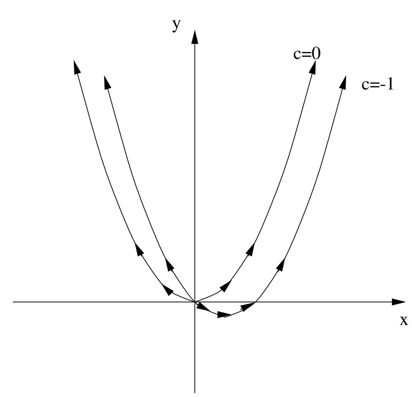
Lösung:

a) Die Lösungskurven entsprechen Feldlinien des Vektorfeldes $\overrightarrow{v} : (x, y) \mapsto \overrightarrow{v}(x, y) = (x, x^2 + y)$ (versehen mit dem entsprechenden Durchlaufsinn). Sie lassen sich also durch Lösen der Differentialgleichung

$$y' = \frac{x^2 + y}{x} = x + \frac{y}{x}$$

bestimmen. Für die homogene Gleichung findet man $y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \Rightarrow y = Cx$ ($C =$ Konstante). Für die partikuläre Lösung findet man (Variation der Konstanten) $y_0 = \gamma x \Rightarrow \gamma = \frac{y_0}{x}$. Daher $y_0' = \gamma' x + \gamma = \frac{y}{x} + x = \gamma + x \Rightarrow \gamma' = 1 \Rightarrow \gamma = x$ und somit ist die partikuläre Löslung $y_0 = x^2$. Die Gleichungen der Feldlinien lauten somit

$$y = x^2 + Cx.$$



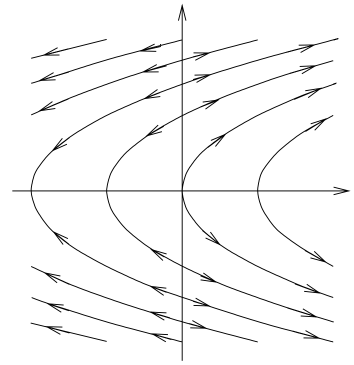
Siehe nächstes Blatt!

b) Die Lösungskurven entsprechen den Feldlinien des Vektorfeldes $v : (x,y) \mapsto v(x,y) = (2x, \frac{x}{y})$ (versehen mit dem entsprechenden Durchlaufsinn). Sie lassen sich also also Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \frac{\frac{x}{y}}{2x} = \frac{1}{2y}$$

bestimmen. Man findet sofort $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x + A$, resp.

$$x = y^2 + B.$$



Es ist auch möglich, das Differentialgleichungssystem zu lösen:
Die erste Differentialgleichung $\dot{x} = 2x$ lässt sich leicht lösen. Man erhält $x(t) = Ce^{2t}$. Dies eingesetzt in der zweiten Gleichung führt zu

$$\dot{y} = \frac{Ce^{2t}}{y} \quad \text{oder} \quad y\dot{y} = Ce^{2t} \implies \frac{y^2}{2} = \frac{C}{2}e^{2t} - \frac{D}{2}.$$

Im Phasenraum ist also die Parameterdarstellung der Lösungskurve gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t) &= Ce^{2t} \\ y(t) &= \pm\sqrt{Ce^{2t} - D} \end{aligned}$$

Durch Elimination von t sieht man, dass die Lösungen auf der Parabelschar $x = y^2 + D$ liegen.
Für $C > 0$ liegen die Punkte in der Halbebene $x > 0$. Für $D > 0$ bewegen sich die Punkte vom Scheitel $(D, 0)$ auf einem der beiden Parabeläste nach rechts. Diese Lösung ist nur für $t \geq \frac{1}{2}\log\frac{D}{C}$ definiert. Für $D \leq 0$ bewegen sich die Punkte ebenfalls nach rechts, aber nur auf den Parabelpunkten die in der Halbebene $x > 0$ liegen.
Für $C = 0$ (und $D \leq 0$) hat man die stationären Lösungen $(x(t), y(t)) = (0, \pm\sqrt{-D})$.
Für $C < 0$ (und $D < 0$) liegt die Lösung in der Halbebene $x < 0$ und läuft in den Scheitelpunkt $(D, 0)$. Diese Lösung ist nur für $t \leq \frac{1}{2}\log\frac{D}{C}$ definiert.

9. $(*)$ Finden Sie alle Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)^2 + y(t)^2 - 1 \\ \dot{y}(t) &= x(t)^2 - y(t)^2. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie, welche Gleichgewichtspunkte stabil sind.
Hinweis: Betrachten Sie für die Stabilität das linearisierte System.

Lösung: Ein Gleichgewichtspunkt ist eine konstante Lösung des Systems. Sei also (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, eine konstante Lösung des Systems, dann gilt (eingesetzt in die Differenzialgleichung)

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 + b^2 - 1 \\ 0 &= a^2 - b^2 \end{aligned} \implies 0 = 2a^2 - 1, \text{ also } a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ und somit } b = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Die Gleichgewichtspunkte sind somit

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right), \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \text{ und } \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

Bitte wenden!

Um die Stabilität zu bestimmen, linearisieren wir das System im Gleichgewichtspunkt (a, b). Sei $f(x, y) := x^2 + y^2 - 1$ und sei $g(x, y) := x^2 - y^2$. Es gilt $f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = 2y$, $g_x(x, y) = 2x$ und $g_y(x, y) = -2y$. Die lineare Ersatzfunktion von f in (a, b) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}(x, y) \longmapsto & f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ & = a^2 + b^2 - 1 + 2a(x - a) + 2b(y - b) = 2ax + 2by - a^2 - b^2 - 1.\end{aligned}$$

Die lineare Ersatzfunktion von g in (a, b) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}(x, y) \longmapsto & g(a, b) + g_x(a, b)(x - a) + g_y(a, b)(y - b) \\ & = a^2 - b^2 + 2a(x - a) - 2b(y - b) = 2ax - 2by - a^2 + b^2.\end{aligned}$$

Das linearisierte System ist folglich

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2ax + 2by - a^2 - b^2 - 1 \\ \dot{y} &= 2ax - 2by - a^2 + b^2\end{aligned} \iff \begin{pmatrix}\dot{x} \\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a & 2b \\ 2a & -2b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-a^2 - b^2 - 1 \\ -a^2 + b^2\end{pmatrix}.$$

Setze

$$A := \begin{pmatrix}2a & 2b \\ 2a & -2b\end{pmatrix}.$$

Eine partikuläre Lösung ist durch den Gleichgewichtspunkt $(x, y) = (a, b)$ gegeben. Die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems hängt nur von den Eigenwerten λ von A ab.

$$\begin{aligned}0 &= \det(A - \lambda E_2) = \det\begin{pmatrix}2a - \lambda & 2b \\ 2a & -2b - \lambda\end{pmatrix} = (2a - \lambda)(-2b - \lambda) - 4ab \\ &= -4ab - 2a\lambda + 2b\lambda + \lambda^2 - 4ab = \lambda^2 + \lambda(2b - 2a) - 8ab\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{2a - 2b + \sqrt{(2b - 2a)^2 + 32ab}}{2} = a - b + \sqrt{(b - a)^2 + 8ab} \\ \lambda_2 &= \frac{2a - 2b - \sqrt{(2b - 2a)^2 + 32ab}}{2} = a - b - \sqrt{(b - a)^2 + 8ab}.\end{aligned}$$

Es gilt, dass (a, b) stabil ist, falls $\operatorname{Re}(\lambda_1) \leq 0$ und $\operatorname{Re}(\lambda_2) \leq 0$. Wir betrachten die oben gefundenen Gleichgewichtspunkte:

- Für $(a, b) = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ oder $(a, b) = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ gilt $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$. Somit ist $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$ und es folgt, dass die Gleichgewichtspunkte $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ und $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ instabil sind.
- Für $(a, b) = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ gilt $\lambda_1 = 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2 - 4} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ und $\lambda_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$. Da $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$ und $\operatorname{Re}(\lambda_2) > 0$, ist $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ instabil.
- Für $(a, b) = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ gilt $\lambda_1 = -2\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2 - 4} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ und $\lambda_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$. Da $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$ und $\operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$, ist $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ stabil.

Siehe nächstes Blatt!

10. Bestimme das Taylorpolynom 6. Ordnung der Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + xy'(x) + x^2y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Lösung: Sei $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ die Taylorreihe einer Lösung. Damit ergibt sich für die Ableitungen

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots, y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \cdots .$$

Schreibt man die Terme, die in der Gleichung vorkommen, geeignet untereinander, ergibt sich

$$\begin{array}{rccccc}
x^2y(x) = & & & a_0x^2 & +a_1x^3 & +a_2x^4 + \cdots \\
xy'(x) = & & a_1x & +2a_2x^2 & +3a_3x^3 & +4a_4x^4 + \cdots \\
y''(x) = & 2a_2 & +6a_3x & +12a_4x^2 & +20a_5x^3 & +30a_6x^4 + \cdots .
\end{array}$$

Die Summe dieser Potenzreihen soll 0 ergeben. Vergleich der Koeffizienten gibt

$$2a_2 = 0, a_1 + 6a_3 = 0, a_0 + 2a_2 + 12a_4 = 0, a_1 + 3a_3 + 20a_5 = 0, a_2 + 4a_4 + 30a_6 = 0.$$

Die Bedingungen $y(0) = 0, y'(0) = 1$ besagen gerade $a_0 = 0, a_1 = 1$. Mit den Gleichungen oben ergibt sich dann

$$a_2 = 0, a_3 = -1/6, a_4 = 0, a_5 = -1/40, a_6 = 0.$$

Das 6. Taylorpolynom einer Lösung lautet also

$$y(x) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5.$$

11. Finden Sie eine Rekursionsformel für die Taylor-Koeffizienten a_n der Lösung $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ des Anfangswertproblems

$$y''(x) + x^3y(x) = x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

und bestimme $a_0, a_1, \ldots, a_{10}$.

Lösung: Für $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ sind

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k$$

und

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k.$$

Nach der Anfangsbedingungen kriegen wir sofort

$$a_0 = 0 = a_1.$$

Durch einsetzen in der Differenzialgleichung kriegen wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + x^3 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x$$

Bitte wenden!

oder auch

$$(0+2)(0+1)a_2+(1+2)(1+1)a_3x+(2+2)(2+1)a_4x^2+\sum_{k=3}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k+a_{k-3}x^k=x.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$a_0=0=a_1=a_2=a_4=a_5=a_6=a_7=a_9=a_{10}$$

$$a_3=\frac{1}{6}$$

$$a_8=-\frac{1}{8\cdot 7\cdot 6}$$

und für $n\geq 11$

$$a_n=-\frac{a_{n-5}}{n(n-1)}.$$