Schnellübung 11

Bemerkung: Diese Schnellübung wird am Mittwoch, dem 02.05.2018, während der Übungsstunde gelöst.

1. Bestimmen Sie das Potential f des Coulombfelds

$$\vec{v}(\vec{r}\,) = -C\frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|^3}$$

auf dem Gebiet $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

2. Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = (4xy,\, 2x^2 + 2yz^2 - \frac{2}{3}y^3,\, 2y^2z - \frac{2}{3}z^3)$.
Es sei K die Kugel mit Radius 1 und Zentrum $(0,0,0)$. Es sei B der im ersten Oktanten $(x \geq 0, y \geq 0,\, z \geq 0)$ liegende Teilkörper von K.

a) Berechnen Sie

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{v}\, dV.$$

b) Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v}$ durch den gekrümmten Teil der Oberfläche von B von innen nach aussen.

3. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x,y,z) \longmapsto \big(2xy + 3, x^2 - 4z, -4y\big)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ konservativ ist.

b) Finden Sie eine Funktion f, so dass $\vec{v} = \mathbf{grad} f$.

c) Berechnen Sie

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r},$$

wobei C ein beliebiger Weg ist, der die Punkte $(3,-1,2)$ und $(2,1,-1)$ verbindet.

Bitte wenden!

4. Es sei S eine Fläche in der Ebene mit Rand ∂S.

a) (Satz von Green) Zeigen Sie, dass für stetig differenzierbare Funktionen $P\colon (x,y) \mapsto P(x,y)$ und $Q\colon (x,y) \mapsto Q(x,y)$ gilt:

$$\int_{\partial S} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Hinweis: Benützen Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld $\vec{v}\colon (x,y,z) \mapsto (P,Q,0)$.

b) Mit $P(x,y) = -y$ und $Q(x,y) = 0$ folgt aus Teil (a), dass der Flächeninhalt $A(S)$ von S gleich

$$A(S) = -\int_{\partial S} y\,\mathrm{d}x$$

ist. Finden Sie ähnliche Formel für die Komponenten des Schwerpunkts

$$\frac{1}{A(S)} \iint_S x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{und} \quad \frac{1}{A(S)} \iint_S y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

bzw. für das polare Trägheitsmoment

$$\iint_S (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

als Integrale entlang ∂S. Verwenden Sie hierzu den Satz von Green für passende Funktionen P, Q.