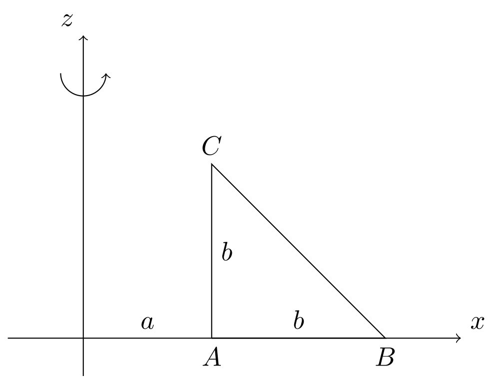
Schnellübung 9

Bemerkung: Diese Schnellübung wird am Mittwoch, dem 28. März 2018, während der Übungsstunde gelöst.

1. Man berechne das Trägheitsmoment um die z-Achse des homogenen Ringes (Dichte $\varrho = 1$), der durch Rotation des Dreiecks ABC um die z-Achse entsteht (siehe untenstehende Figur).



2. Bestimmen Sie das Volumen der Eistüte, welche durch den Kegel $x^2 + y^2 = 3z^2$ und die Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ beschränkt wird und sich oberhalb der xy-Ebene befindet.

3. Es sei $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ein Vektorfeld. Die Divergenz $\operatorname{div} \vec{v}$ ist definiert als

$$\operatorname{div} \vec{v}(x,y,z) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x,y,z) = \nabla \cdot \vec{v}(x,y,z)$$

und die Rotation $\operatorname{rot} \vec{v}$ als

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} = \nabla \times \vec{v}(x,y,z),$$

wobei $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$ den Nabla-Operator bezeichnet.

Bitte wenden!

a) Beweisen Sie die Identität $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = 0$.

b) Zeigen Sie weiters: Ist f eine Funktion, so ist

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \Delta f,$$

wobei (wie bekannt) $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ ist.

c) Beweisen Sie die Identität

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} - \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}.$$

4. **a)** Es sei $\vec{v}(x, y, z) = (z - y, x + z, -x - y)$. Berechnen Sie $\operatorname{div}\vec{v}$ und $\operatorname{rot}\vec{v}$.

b) Es sei $\vec{v}(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$. Berechnen Sie $\operatorname{div}\vec{v}$ und $\operatorname{rot}\vec{v}$.

c) Zeigen Sie, dass für zwei differenzierbare Vektorfelder $\vec{w_1}$ und $\vec{w_2}$ gilt:

$$\operatorname{div}(\vec{w_1} \times \vec{w_2}) + \vec{w_1} \cdot \operatorname{rot}\vec{w_2} = \vec{w_2} \cdot \operatorname{rot}\vec{w_1}.$$

5. **a)** Gibt es ein Vektorfeld $\vec{v}$ mit $\operatorname{rot}\vec{v}(x, y, z) = (x, y, z)$?

b) Gibt es ein Vektorfeld $\vec{w}$, für das

$$\operatorname{rot}\vec{w} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right)$$

gilt?