Serie 18

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis **Mittwoch, 11.04.2018 um 12.00 Uhr** ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Mittwoch, 11.04.2018 in der Vorlesung.

Homepage: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-0262-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Klicken Sie die *falsche* Aussage an.

(a) Der Operator $\operatorname{div}(\cdot)$ ordnet einem Vektorfeld $\vec{v}$ ein Skalarfeld $\operatorname{div}\vec{v}$ zu.

(b) $\operatorname{div}\vec{v} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial y}, \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)$

(c) $\operatorname{div}\vec{v}$ des Coulombfeldes $\vec{v}$ ist Null.

(d) Der Operator $\operatorname{grad}(\cdot)$ ordnet einem Skalarfeld f ein Vektorfeld $\operatorname{grad} f$ zu.

(e) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$ ist eine zulässige Bildung.

2. Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon (x, y, z) \mapsto \left(xz^{\alpha}r,\ yz^{\beta}r,\ z^2r^3\right) \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Für welche Konstanten α und β ist $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$?

(a) $\alpha = 0$ und $\beta = 0$.

(b) $\alpha = 1$ und $\beta = 3$.

(c) $\alpha = 3$ und $\beta = 2$.

(d) $\alpha = 3$ und $\beta = 3$.

3. Klicken Sie die *falschen* Aussagen an.

(a) $\operatorname{div}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\operatorname{grad}(x+y+z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(x+y+z)) = 0$

(d) $\operatorname{rot}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $\operatorname{div}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3$

Siehe nächstes Blatt!

4. Ein Vektorfeld $\vec{v}$ heisst quellenfrei wenn $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ und wirbelfrei wenn $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ gilt. Klicken Sie die richtige Aussage an.

(a) Quellenfreie Vektorfelder sind auch wirbelfrei.

(b) Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ sind quellenfrei.

(c) Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{w}$ sind quellenfrei.

(d) Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{w}$ sind wirbelfrei.

Übungsaufgaben

5. Es seien a und c Konstanten. Das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = c\left(1 - a^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, -a^2 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, 0\right)$$

beschreibt die Strömung einer idealen Flüssigkeit um einen Zylinder vom Radius a, dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt (siehe dazu die Abbildung)

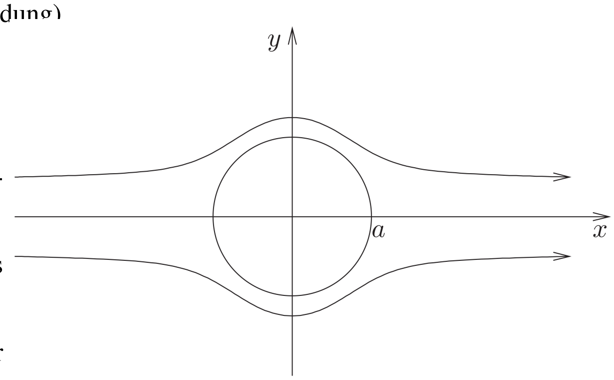
a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ und

b) dass $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ gilt,

c) dass an der Oberfläche des Zylinders die Strömung tangential verläuft und

d) dass in grosser Entfernung vom Zylinder das Vektorfeld nahezu homogen ist.

e) Bestimmen Sie weiters die Punkte maximaler und minimaler Geschwindigkeit auf der Zylinderoberfläche.



6. Gegeben ist das zweidimensionale Vektorfeld $\vec{v}(x, y) = \big(x^2 - y^2, 2xy\big)$. Zeigen Sie, dass die Feldlinien Kreise sind, welche die x-Achse im Ursprung berühren und bestimmen Sie die Koordinaten der zugehörigen Kreismittelpunkte.

7. Ein ebenes Vektorfeld $K(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ wird *harmonisch* genannt, falls es sowohl divergenzfrei als auch wirbelfrei ist, das heisst, falls $\operatorname{div} K = P_x + Q_y = 0$ und $\operatorname{rot} K = Q_x - P_y = 0$ gelten. Ferner bezeichne K_α das Feld, das entsteht, wenn jeder Feldvektor eines Feldes K um den Winkel α gedreht wird.

Das Feld K sei harmonisch. Zeigen Sie, dass dann auch K_α harmonisch ist.

Hinweis: Ist (x, y) ein Punkt in der Ebene, so berechnet sich der um den Winkel α gedrehte Punkt durch

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

8. Eine Gerade geht durch den Punkt $(1, 0, 0)$ und hat den Richtungsvektor $(0, 1, 1)$. Lässt man sie um die z-Achse rotieren, so erzeugt sie eine Fläche *(einschaliges Rotationshyperboloid)*.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Fläche an.

b) Bestimmen Sie die Gleichung dieser Fläche.

c) In welchen Punkten der Fläche ist der Normalenvektor parallel zur Richtung des Vektors $(1, 1, -1)$?

d)* Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 2$.