Serie 20

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis **Mittwoch, 25.04.2018 um 12.00 Uhr** ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Mittwoch, 25.04.2018 in der Vorlesung.

Homepage: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-0262-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Es sei B die Einheitskugel um den Ursprung. Für welches der Vektorfelder $(x, y, z) \mapsto \vec{v}(x, y, z)$ darf der Divergenzsatz für den Bereich B *nicht* angewendet werden?

(a) $\vec{v} = (x, y, z)$

(b) $\vec{v} = C \cdot \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ (wobei $\vec{r} = (x, y, z)$ ist)

(c) $\vec{v} = (xyz, x^2z^2, x^3ze^y)$

(d) $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (wobei $\vec{\omega}$ ein beliebiger Vektor ist)

(e) $\vec{v} = \vec{a}$ (wobei $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor ist)

(f) $\vec{v} = (\ln x, \ln y, \ln z)$

Bitte wenden!

2. Welche der folgenden fünf Aussagen ist logisch unabhängig von den anderen vieren? (Das heisst, welche Aussage folgt nicht aus einer anderen und hat auch keine der anderen Aussagen als Konsequenz?)

(a) Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist quellenfrei.

(b) Der Fluss Φ von $\vec{v}$ durch irgend eine geschlossene Fläche ist Null.

(c) $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

(d) $\operatorname{rot} \vec{v} = (0, 0, 0)$.

(e) Das Vektorfeld $\vec{v}$ könnte das Strömungsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit sein.

3. Es sei $f(x, y, z) = (1 - z^2)^2$. Berechnen Sie den Fluss von $\operatorname{grad} f$ durch die Oberfläche der Kugel vom Radius 1 um $(0, 0, 0)$ von innen nach aussen.

(a) 0

(b) -4π

(c) $-\frac{32}{15}\pi$

(d) $\frac{15}{32}\pi$

4. Die Arbeit W eines Vektorfeldes $\vec{v}$ längs des Geradenstücks von $(1, 0, 0)$ nach $(-1, -1, -1)$ sei gleich 5. Welches Resultat erhält man, wenn man die Arbeit W' von $\vec{v}$ längs des Geradenstücks von $(-1, -1, -1)$ nach $(1, 0, 0)$ berechnet?

(a) Die Arbeit W' lässt sich aus den Angaben nicht berechnen.

(b) Die Arbeit W' beträgt ebenfalls 5.

(c) Die Arbeit W' beträgt -5.

Siehe nächstes Blatt!

5. Das Arbeitsintegral $\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ des Vektorfeldes

$$\vec{v}(x,y,z) = \left(e^{y^2} + e^{z^2},\ \ (2z+1)xe^{z^2} + (2x+1)ye^{y^2},\ \ xyze^{x^2+y^2}\right)$$

entlang des geschlossenen Weges γ, welcher aus den Seiten des Dreieckes mit den Eckpunkten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(-1,0,0)$ besteht und im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird, beträgt:

(a) 1

(b) -1

(c) 2

Übungsaufgaben

6. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v}(x,y,z) = (x,y,z)$ durch das Paraboloid

$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

von oben nach unten.[1]

7. **a)** Man berechne den Fluss Φ des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x,y,z) \longmapsto \left(\frac{1}{3}x^3 - xz, xy + yz, y^2 z - xz\right)$$

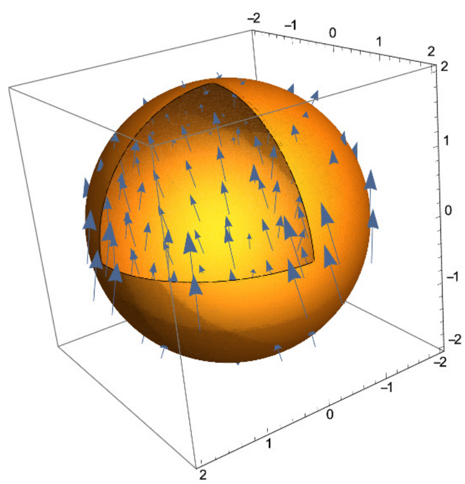
von innen nach aussen durch die Oberfläche des geraden Kreiskegels mit Spitze in $(0,0,2)$ und Grundfläche $\left\{(x,y,z)\,\middle|\, z = 0\,,\ x^2 + y^2 \le 4\right\}$.

b) Sei $R > 0$ fest gewählt. Berechne den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x,y,z) \longmapsto \left(R\left(y^2+z^2\right), R^2\left(x^2+z^2\right), R^3\left(x^2+y^2\right)\right)$$

von innen nach aussen durch die Oberfläche

$$E := \left\{(x,y,z)\,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = R^2, x \le 0 \text{ oder } y \le 0 \text{ oder } z \le 0\right\}.$$



[1] Lösung: $\pi/2$.

Bitte wenden!

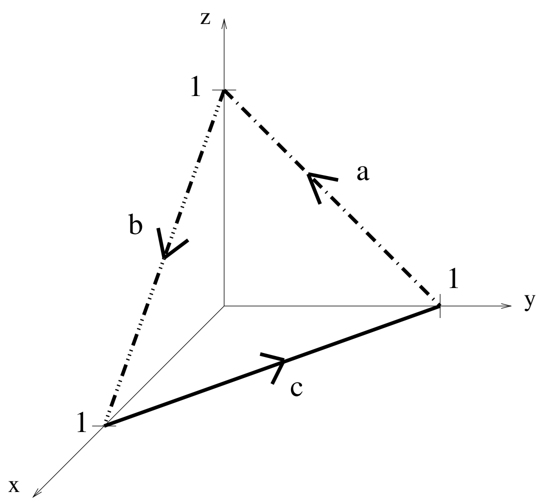
8. Es sei das Vektorfeld $\vec{v}$ durch

$$\vec{v}\colon\ (x,y,z) \mapsto \big(-x^3 - 2x + z, -y^3 - 2y + x, -z^3 - 2z + y\big)$$

und der Weg γ wie in der untenstehenden Figur definiert (er folgt zunächst a, dann b und schliesslich c). Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

a) direkt;

b) mit Hilfe des Satzes von Stokes.[2]

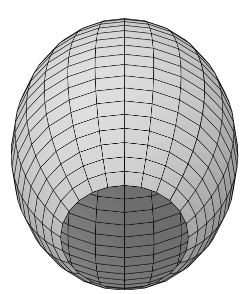


9. Ein Heissluftballon habe die Form einer Sphärenkappe (also einer Kugeloberfläche mit horizontalem Schnitt) vom Radius R und Öffnungsdurchmesser $d < 2R$, wie in der untenstehenden Figur. Das heisse Gas dringt durch die poröse Oberfläche B der Kappe mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{F}$, wobei $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, 0)$. Berechnen Sie den Fluss $\iint_B \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}\mathcal{O}$ durch die Ballonoberfläche B

a) direkt;

b) mit dem Satz von Gauss;

c) mit dem Satz von Stokes.



[2]Lösung: $3/2$.