D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2018
Dr. Andreas Steiger

Serie 24

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis **Mittwoch, 23.05.2018 um 12.00 Uhr** ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Mittwoch, 23.05.2018 in der Vorlesung.

Homepage: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-0262-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Welche der folgenden Differenzialgleichungen ist linear?

(a) $(y'-2)^2 = y$

(b) $y'' + \dfrac{y'}{1-x^2} + \dfrac{y}{1+x} = \dfrac{1}{x^2}$

(c) $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$

(d) $y'' + y' + y^2 = 0$

(e) $y = xy' + (y')^2$

2. Gegeben seien Funktionen $s,\, t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Welche aus den folgenden Bedingungen garantieren die Exaktheit der Differenzialgleichung $s(x,y) = t(x,y)\cdot y'$?

(a) Für alle (x,y): $s_y(x,y) = t_x(x,y)$.

(b) Für alle (x,y): $s_x(x,y) = t_y(x,y)$.

(c) Für alle (x,y): $s_y(x,y) = -t_x(x,y)$.

(d) Für alle (x,y): $s_x(x,y) = -\frac{1}{t_y(x,y)}$.

(e) Keine.

Bitte wenden!

3. Welche aus den folgenden Gleichungen sind exakt?

(a) $e^x \sin y + 3y - (3x - e^x \sin y)y' = 0.$

(b) $\left(\frac{y}{x} + 6x\right) + (\log x - 2)y' = 0,\ x > 0.$

(c) $(y \log x + xy)y' = -x \log y - xy.$

(d) $y' = -\frac{ax+by}{bx+cy},\ a, b, c, d > 0$ Konstante.

4. Welche Aussagen über die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar

$$x^2 + Cy^2 = 1$$

mit Scharparameter C sind korrekt?

(a) Die y–Achse ist eine Orthogonaltrajektorie.

(b) Alle Orthogonaltrajektorien, welche den Punkt $(0, 0)$ nicht treffen, sind geschlossene Kurven.

(c) Die Kurven der Form $y^2 + x^2 - \ln |x| = K$ mit $K \geq 1$ sind Orthogonaltrajektorien.

(d) Die Kurven der Form $y^2 + x^2 - \ln(x^2) = K$ mit $K \geq 1$ sind Orthogonaltrajektorien.

Siehe nächstes Blatt!

5. Betrachten Sie die 2-parametrige Schar

$$y_\omega(x) = C_1 \cosh(\omega x) + C_2 \sinh(\omega x)$$

mit Parametern C_1, C_2. Wählen Sie alle Differentialgleichungen aus, für die obiges $y_\omega(x)$ eine Lösung für jedes $\omega \neq 0$ ist.

(a) $y^{(4)} - \omega^4 y = 0$

(b) $y' - \omega y = 0$

(c) $y'' + \omega^2 y = 0$

(d) $y'' - \omega y = 0$

(e) $y'' - \omega^2 y = 0$

Übungsaufgaben

6. Bestimme die Kurvenschar der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y^2 \cdot (y')^2 + y^2 - 1 = 0, \quad y = y(x) > 0$$

sowie ihre Enveloppen.

7. Betrachten Sie die 3-parametrige Kurvenschar

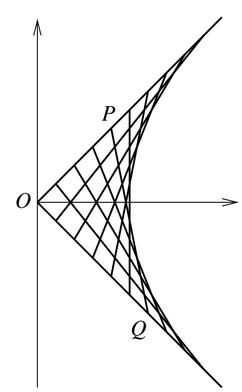
$$y(x) = C_1 \cosh(C_3 x) + C_2 \sinh(C_3 x)$$

mit den Parametern $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine zugehörige Differentialgleichung.

8. Seien P und Q Punkte auf den Winkelhalbierenden des ersten bzw. zweiten Quadranten. Man berechne die Enveloppe der Schar der Geraden $\overline{PQ}$, für die die Summe der Längen

$$PO + QO = 2\sqrt{2}$$

ist. (O ist der Koordinatenursprung.)



9. Die Differenzialgleichung

$$\left(2x - x^2\right) y'' + \left(x^2 - 2\right) y' + 2\,(1 - x)\, y = 0$$

besitzt die Lösung $y_1 : x \longmapsto e^x$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Substitution $y(x) = z(x)e^x$ die allgemeine Lösung.