Serie 25

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis **Mittwoch, 30.05.2018 um 12.00 Uhr** ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Mittwoch, 30.05.2018 in der Schnellübung.

Homepage: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-0262-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Wie lautet die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung $y''' + 2y' + y = 0$?

(a) $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$

(b) $\lambda^3 + 2\lambda = 0$

(c) $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

(d) $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

Bitte wenden!

2. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$ sind richtig?

(a) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 1 - e$.

(b) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 0$.

(c) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1 - e$ und $y(1) = 0$.

(d) Es existiert eine Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ konvergiert für $x \to \infty$.

(e) Es existiert eine Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ konvergiert für $x \to -\infty$.

(f) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

(g) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -3$.

(h) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$.

(i) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

3. Was kann man über eine Differentialgleichung der Form $y'' + ay' + by = e^x$ mit konstanten Koeffizienten a und b immer sagen?

(a) Ihre Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 2.

(b) Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt αe^x für eine Konstante α.

(c) Ihre allgemeine Lösung lautet $y_h(x) + \alpha e^x$, wobei y_h die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist und α eine Konstante ist.

(d) Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\, e^x$ für Konstanten $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

4. Die allgemeine Lösung der Euler'schen Differenzialgleichung

$$x^2 y'' - xy' + y = 0$$

ist gleich...

(a) $y(x) = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x (\ln x)^2$

(b) $y(x) = C_1 x + C_2 x^2$

(c) $y(x) = C_1 x \ln x + C_2 (\ln x)^2$

(d) $y(x) = C_1 x + C_2 x \ln x$

Siehe nächstes Blatt!

5. Das Indexpolynom einer (homogenen) Eulerschen Differentialgleichung der Ordnung 4 hat die doppelte komplexe Nullstelle $\alpha = \pm i$. Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

(a) $C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)$

(b) $C_1 \cos(x) + C_2 x \cos(x) + C_3 \sin(x) + C_4 x \sin(x)$

(c) $C_1 + C_2 \cos(\ln x) + C_3 (\ln x) \cos(\ln x) + C_4 \sin(\ln x) + C_5 (\ln x) \sin(\ln x)$

(d) $C_1 \cos(\ln x) + C_2 (\ln x) \cos(\ln x) + C_3 \sin(\ln x) + C_4 (\ln x) \sin(\ln x)$

(e) $C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) + C_3$

Übungsaufgaben

6. **a)** Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$.

b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{gathered} y'' + 4y' = xe^x, \quad x \in (-\infty, \infty) \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{gathered}$$

c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y''' + y'' + y' + y + x + 1 = 0$ mit $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

7. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - (2\alpha - 4)y' + (8 - 4\alpha)y = 0.$$

a) Für welche Werte von α gibt es sowohl Lösungen, die für $x \to \infty$ konvergieren (aber ungleich der konstanten Funktion 0 sind) als auch Lösungen, die für $x \to \infty$ nicht konvergieren?

b) Für welche α gibt es Lösungen y, die für $x \to \infty$ konvergieren mit $\lim_{x\to\infty} y(x) \neq 0$?

8. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$r^2 u''(r) = -ru'(r) + u(r) + 2r, \quad \text{wobei} \quad r > 0.$$

a) Finden Sie die Lösung $u(r)$ mit $u(1) = 0$ und $u'(1) = 0$.

b) Finden Sie all diejenigen Lösungen $u(r)$, welche für $r \to 0$ konvergieren.

9. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{1}{x^2}y = 1, \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

für die Funktion $y = y(x)$, $x > 0$.

Hinweis: Für die partikuläre Lösung können Sie den Ansatz $y_p(x) = A + Bx + Cx^2$ wählen.