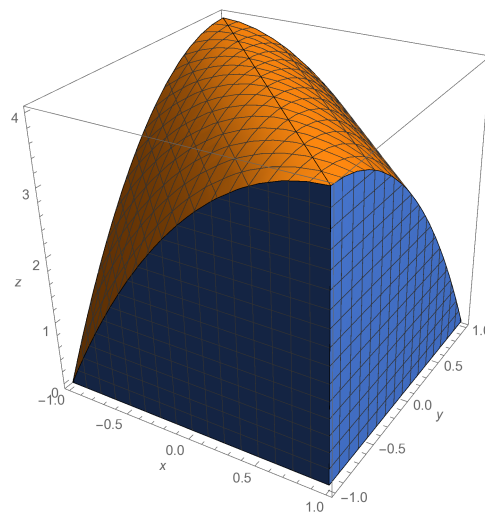


Lösung - Schnellübung 10

1. Es bezeichne S die Region

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 4 - (x + y)^2\}.$$

Verwenden Sie den Divergenzatz um den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v} = (2xy, -y^2, z^2)$ durch S (von innen nach aussen) zu berechnen.



Lösung: Es gilt

$$\operatorname{div} \vec{v} = 2y - 2y + 2z = 2z.$$

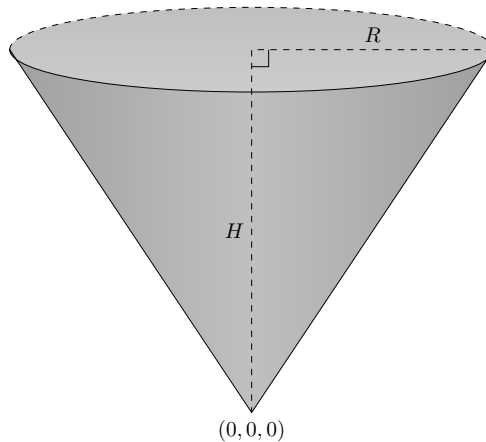
Aus dem Divergenzatz folgt $\Phi_S = \iint_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\mathcal{O} = \iiint_S \operatorname{div}(\vec{v}) \, dV$ und somit ist

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^{4-(x+y)^2} 2z \, dz \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [z^2]_0^{4-(x+y)^2} \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (4 - (x + y)^2)^2 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \left[16y - \frac{8(x + y)^3}{3} + \frac{(x + y)^5}{5} \right]_{-1}^1 \, dx \\ &= \left[32x - \frac{2(x + 1)^4}{3} + \frac{2(x - 1)^4}{3} + \frac{(x + 1)^6}{30} - \frac{(x - 1)^6}{30} \right]_{-1}^1 = \frac{704}{15}. \end{aligned}$$

2. Gegeben sei eine Strömung mit Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = (2x^2, y, 1 - z)$.

Welche Menge strömt (von aussen nach innen) pro Zeiteinheit durch die Mantelfläche des geraden Kreiskegels mit Radius R und Höhe H parallel zur z -Achse mit Spitze im Ursprung?

Bitte wenden!



Lösung: Parametrisierung der Kegelmantelfläche

$$\vec{s}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \\ z(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ \frac{H}{R}r \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

mit

$$\vec{s}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \frac{H}{R} \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_r \times \vec{s}_\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{rH}{R} \cos \varphi \\ -\frac{rH}{R} \sin \varphi \\ r \end{pmatrix}$$

Dies ist der Normalenvektor auf der Mantelfläche, der nach innen zeigt. Der Fluss ins Innere des Kegels ist dann

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \vec{v}(\vec{s}(r, \varphi)) \cdot (\vec{s}_r \times \vec{s}_\varphi) \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \begin{pmatrix} 2r^2 \cos^2 \varphi \\ r \sin \varphi \\ 1 - \frac{H}{R}r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{rH}{R} \cos \varphi \\ -\frac{rH}{R} \sin \varphi \\ r \end{pmatrix} \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R -2\frac{H}{R}r^3 \cos^3 \varphi - \frac{H}{R}r^2 \sin^2 \varphi + r - \frac{H}{R}r^2 \, dr \, d\varphi \\ &= -\frac{1}{2}R^3H \int_0^{2\pi} \cos^3(\varphi) \, d\varphi - \frac{1}{3}R^2H \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) \, d\varphi + \left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{3}R^2H\right) \int_0^{2\pi} \, d\varphi \\ &= -\frac{1}{3}R^2H\pi + \left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{3}R^2H\right) 2\pi \\ &= R^2\pi - R^2H\pi \end{aligned}$$

Variante: Man kann auch den Divergenzansatz benutzen. Es gilt $\operatorname{div} \vec{v} = 4x$ und für den gesamten Kegel K erhält man (mit Zylinderkoordinaten)

$$\Phi_K = \iint_{\partial K} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\mathcal{O} = \iiint_K \operatorname{div} \vec{v} \, dV = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{H}z} 4r \cos \varphi \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz = 0.$$

Dies ist gleich Null, da $\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi$ verschwindet. Berechnen wir noch den Fluss durch die Deckfläche D des Kegels (von aussen nach innen, d.h. von oben nach unten). Wir benutzen die Parametrisierung

Siehe nächstes Blatt!

$\vec{r}(\varrho, \varphi) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, H)$, $0 \leq \varrho \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ von D mit Normalenvektor $\vec{r}_\varrho \times \vec{r}_\varphi = (0, 0, \varrho)$, der nach oben zeigt. Also müssen wir ihn drehen und erhalten

$$\begin{aligned}\Phi_D &= \iint_D \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO = \int_0^{2\pi} \int_0^R \vec{v}(\vec{r}(\varrho, \varphi)) \cdot (0, 0, -\varrho) \, d\varrho d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^R (H-1)\varrho \, d\varrho = \pi(H-1)R^2.\end{aligned}$$

Der Fluss durch den Mantel ist gemäss dem Divergenzsatz also $-\pi(H-1)R^2$, weil der Gesamtfluss Null ist.¹ Das bestätigt das Resultat bei der ersten Variante.

3. Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein endlicher Bereich mit Rand ∂B und seien f, g zweimal stetig differenzierbare Skalarfelder. Beweisen Sie die Greenschen Identitäten, die in der Potentialtheorie und in der Elektrodynamik gebraucht werden.

a) Erste Greensche Identität

$$\iint_{\partial B} (f \cdot \mathbf{grad} g) \cdot \vec{n} \, dO = \iiint_B (f \cdot \Delta g + \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{grad} g) \, dV$$

Hinweis: Wenden Sie den Divergenzsatz für das Vektorfeld $f \cdot \mathbf{grad} g$ an.

b) Zweite Greensche Identität

$$\iint_{\partial B} (f \cdot \mathbf{grad} g - g \cdot \mathbf{grad} f) \cdot \vec{n} \, dO = \iiint_B (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f) \, dV$$

Lösung:

a) Seien $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ und $g : (x, y, z) \mapsto g(x, y, z)$ zwei 2-mal stetig differenzierbare Skalarfelder. Wir definieren das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \mapsto \vec{v}(x, y, z) = f(x, y, z) \cdot \mathbf{grad} g(x, y, z) \quad (\text{Hinweis}),$$

und berechnen

$$\begin{aligned}\mathbf{div} \vec{v} &= \mathbf{div} (f \cdot \mathbf{grad} g) = \mathbf{div} (f(g_x, g_y, g_z)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (fg_x) + \frac{\partial}{\partial y} (fg_y) + \frac{\partial}{\partial z} (fg_z) \\ &= f_x g_x + f g_{xx} + f_y g_y + f g_{yy} + f_z g_z + f g_{zz} \\ &= f \cdot \left(\underbrace{g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}}_{\Delta g} \right) + \underbrace{(f_x, f_y, f_z) \cdot (g_x, g_y, g_z)}_{\mathbf{grad} f \cdot \mathbf{grad} g}.\end{aligned} \quad (1)$$

Wir wenden nun den Divergenzsatz an und erhalten die erste Greensche Identität

$$\begin{aligned}\iint_{\partial B} f \cdot \mathbf{grad} g \cdot \vec{n} \, dO &= \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO = \iiint_B \mathbf{div} \vec{v} \, dV \\ &\stackrel{(1)}{=} \iiint_B (f \cdot \Delta g + \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{grad} g) \, dV.\end{aligned} \quad (2)$$

¹Bei einer Strömung ist zu erwarten, dass der Gesamtfluss verschwindet. Zumindest wenn es sich um Flüssigkeiten handelt, diese sind normalerweise inkompressibel.

Bitte wenden!

b) Wir ersetzen in Gleichung (2) f durch g und g durch f , und erhalten

$$\iint_{\partial B} g \cdot \mathbf{grad} f \cdot \vec{n} \, dO = \iiint_B (g \cdot \Delta f + \mathbf{grad} g \cdot \mathbf{grad} f) \, dV. \quad (3)$$

Nun „ziehen“ wir von der Gleichung (2) die Gleichung (3) ab. Da

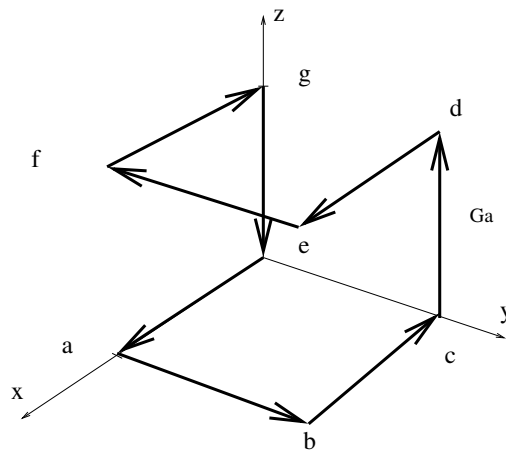
$$\mathbf{grad} g \cdot \mathbf{grad} f = \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{grad} g,$$

erhalten wir die zweite Greensche Identität.

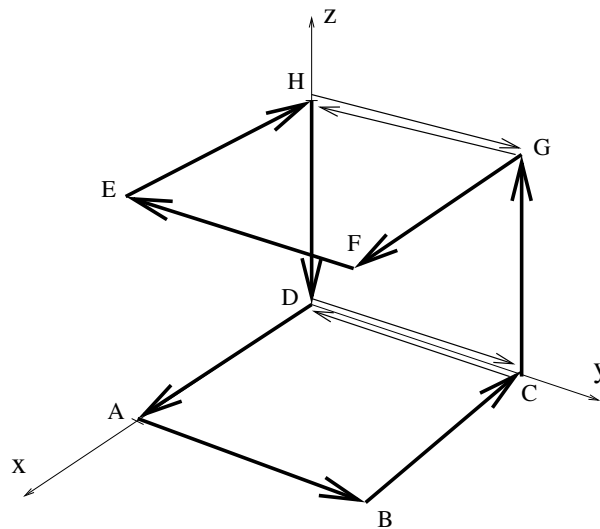
4. Berechnen Sie die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \mapsto (yz, xyz, xy)$$

entlang des geschlossenen Weges Γ (siehe Figur) leistet. Die einzelnen Teilabschnitte des Weges Γ haben dabei Länge 1.



Lösung: Wir betrachten die geschlossenen Wege $ABCD A$, $CGHDC$ respektive $GFEHG$.



Siehe nächstes Blatt!

Das Vektorfeld \vec{v} leistet darauf die Arbeit W_{ABCD} , W_{CGHD} respektive W_{GFEH} . Da die beiden Strecken CD und GH zweimal durchlaufen werden, und zwar in entgegengesetzten Richtungen, gilt

$$W_{tot} = W_{ABCD} + W_{CGHD} + W_{GFEH}.$$

Sei Q_{ABCD} das Quadrat $ABCD$, Q_{CGHD} das Quadrat $CGHD$ und Q_{GFEH} das Quadrat $GFEH$. Nach dem Satz von Stokes gilt

$$W_{tot} = \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_{Q_{ABCD}} \mathbf{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dO + \iint_{Q_{CGHD}} \mathbf{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dO + \iint_{Q_{GFEH}} \mathbf{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dO.$$

Es gilt $\mathbf{rot} \vec{v}(x, y, z) = (x - xy, 0, yz - z)$.

Auf Q_{ABCD} ($z = 0$) ist $\vec{n} = (0, 0, 1) \perp \mathbf{rot} \vec{v}(x, y, 0)$, also $W_{ABCD} = 0$ und auf Q_{CGHD} ($x = 0$) ist $\vec{n} = (1, 0, 0) \perp \mathbf{rot} \vec{v}(0, y, z)$, also $W_{CGHD} = 0$. Es folgt dann

$$\begin{aligned} W_{tot} &= W_{GFEH} = \iint_{Q_{GFEH}} \mathbf{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dO \\ &\stackrel{z=1}{=} \int_0^1 \int_0^1 (x - xy, 0, y - 1) \cdot (0, 0, -1) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (1 - y) dy dx = \int_0^1 \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$