Lösung - Serie 14

1. Für welche der folgenden Funktionen f ist

$$f_x(x,y) = e^{4x} + 2xy^2,$$
$$f_y(x,y) = \cos y + 2x^2 y?$$

√ (a) $(x,y) \longmapsto \frac{1}{4}e^{4x} + x^2y^2 + \sin y + \pi.$

(b) $(x,y) \longmapsto \frac{1}{4}e^{4x} + x^2y^2 + v(y)$, wobei $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion ist.

√ (c) $(x,y) \longmapsto \frac{1}{4}e^{4x} + x^2y^2 + \sin(\pi - y).$

(d) Keine Option ist richtig.

Die richtigen Antworten sind (a) und (c). Bei der Funktion, die in (a) gegeben ist, sieht man leicht, dass die partielle Ableitung nach x durch $e^{4x} + 2xy^2$ und die nach y durch $\cos(y) + 2x^2y$ gegeben ist. Das Argument für die in (c) gegebene Funktion ist ähnlich, nachdem man die Identität $\sin(\pi - y) = \sin(y)$, die für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt, verwendet. Folglich kann (d) nicht stimmen. Die Funktion in (b) hat die korrekte partielle Ableitung nach x, da aber $v(y)$ beliebig ist, muss die partielle Ableitung nach y nicht notwendigerweise gleich $\cos y + 2x^2y$ sein. Es könnte sogar sein, dass die Ableitung von $v(y)$ gar nicht existiert!

Bitte wenden!

2. Die zweifach stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für welche die partiellen Ableitungen f_{xx} und f_{yy} identisch verschwinden, sind genau

(a) die Produkte einer Funktion von x mit einer Funktion von y.

(b) die Produkte von zwei linearen Funktionen.

(c) die Produkte einer linearen Funktion von x mit einer linearen Funktion von y.

√ (d) die Funktionen der Gestalt $a + bx + cy + dxy$ für Konstanten a, b, c, d.

Antworten (a) und (b) sind falsch, weil sie beide die Funktion $f(x, y) = x^2$ erlauben, für welche $f_{xx} = 2 \neq 0$ ist. Für die Funktionen in (c) und (d) hingegen rechnet man schnell nach, dass sie $f_{xx} = f_{yy} = 0$ erfüllen. Insbesondere ist $f(x, y) = 1 + xy$ nach (d) eine solche Funktion, welche sich aber nicht in der Form (c) schreiben lässt. Also bleibt nur (d) als richtige Antwort übrig.
Antwort (d) ist auch wirklich korrekt. Denn $\frac{\partial}{\partial x} f_x = f_{xx} = 0$ impliziert $f_x(x, y) = u(y)$ für eine Funktion $u(y)$. Somit ist $\frac{\partial}{\partial x}\big(f(x, y) - u(y)x\big) = f_x(x, y) - u(y) = 0$ und daher $f(x, y) - u(y)x = v(y)$ für eine weitere Funktion $v(y)$. Es gilt also $f(x, y) = u(y)x + v(y)$. Daraus folgt aber $f_{yy} = u''(y)x + v''(y)$, und dies verschwindet identisch genau dann, wenn $u''(y)$ und $v''(y)$ identisch verschwinden. Dann müssen aber $u(y)$ und $v(y)$ lineare Funktionen von y sein, wie in Antwort (d).

3. Die Gleichung der Tangentialebene an das Paraboloid $z = x^2 + y^2$ im Punkt (1,2,5) lautet

(a) $4x + 2y - z = 8$.

(b) $2x + 4y - z = 11$.

√ (c) $2x + 4y - z = 5$.

(d) $4x + 2y - z = 3$.

Die richtige Antwort lautet (c). Sei $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$. Die Gleichung der Tangentialebene des Graphen von f über dem Punkt (x_0, y_0) ist:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0).$$

Es ist

$$f_x(x, y) = 2x\,, \quad f_y(x, y) = 2y \implies f_x(1, 2) = 2\,, \quad f_y(1, 2) = 4.$$

Die gesuchte Tangentialebene hat also die Gleichung

$$z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2) \quad \text{oder} \quad 2x + 4y - z = 5.$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Für welche der folgenden Paaren von Funktionen $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass $f_x(x,y) = \phi(x,y)$ und $f_y(x,y) = \psi(x,y)$ gilt?

√ (a) $\phi(x,y) = \left(\frac{y^3}{3}\right)\sinh(x) + y + \frac{x^2}{2}$ und $\psi(x,y) = y^2\cosh(x) + x$.

(b) $\phi(x,y) = x\sin(xy)$ und $\psi(x,y) = x\sin(xy) + 3x$.

√ (c) $\phi(x,y) = e^{x+\sin(y)}$ und $\psi(x,y) = \cos(y)e^{x+\sin(y)}$.

√ (d) $\phi(x,y) = xye^{x^2y}$ und $\psi(x,y) = \frac{1}{2}x^2e^{x^2y}$.

(e) $\phi(x,y) = \sinh(x^2y)$ und $\psi(x,y) = \sinh(xy^2)$.

Aus den Sätzen der Seiten 18 und 21 in Kapitel 4 von Stammbach folgt, dass die Funktion f dann, und nur dann, existiert, wenn

$$\phi_y(x,y) = \psi_x(x,y)$$

gilt. Wir müssen also für jedes Paar (ϕ, ψ) überprüfen, ob dies der Fall ist.

In Teil (a) gilt

$$\phi_y(x,y) = y^2\sinh(x) + 1 = \psi_x(x,y)$$

und somit existiert f.

In Teil (b) gilt

$$\phi_y(x,y) = x^2\cos(xy)$$

und

$$\psi_x(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy) + 3,$$

woraus folgt, dass f nicht existiert.

In Teil (c) gilt

$$\phi_y(x,y) = \cos(y)e^{x+\sin(y)} = \psi_x(x,y)$$

und somit existiert f.

In Teil (d) gilt

$$\phi_y(x,y) = xe^{x^2y} + yx^3e^{x^2y} = \psi_x(x,y)$$

und somit existiert f.

In Teil (e) gilt

$$\phi_y(x,y) = x^2\cosh(x^2y)$$

und

$$\psi_x(x,y) = y^2\cosh(xy^2),$$

woraus folgt, dass f nicht existiert.

Bitte wenden!

5. Es sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion in zwei Variablen und es seien $x_0, y_0 \in (0,1)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Falls $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ gilt, so hat f ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum an der Stelle (x_0, y_0).

Die Aussage ist falsch, da beispielsweise für $f(x,y) = (x - 1/2)^3$ einerseits

$$f_x(x,y) = 3(x - 1/2)^2$$

und andererseits

$$f_y(x,y) = 0$$

gilt. Somit ist $f_x(1/2, 1/2) = f_y(1/2, 1/2) = 0$, der Punkt $(1/2, 1/2)$ ist aber weder eine lokale Maximal-, noch eine lokale Minimalstelle von f. Um dies einzusehen bemerken wir, dass für jede reelle Zahl $r > 0$ die Kreisscheibe mit Radius 0 und Mittelpunkt $(1/2, 1/2)$ die Punkte $(1/2 + r/2, 1/2)$ und $(1/2 - r/2, 1/2)$ enthält, die der Gleichung

$$f(1/2 + r/2, 1/2) > f(1/2, 1/2) > f(1/2 - r/2, 1/2)$$

genügen.

√ (b) Falls (x_0, y_0) eine lokale Minimalstelle von f ist, so gilt $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

Die Aussage ist wahr. Betrachten Sie dazu den Satz auf Seite 32, Kapitel 4 im Stammbach.

(c) Wir definieren $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $u : x \mapsto f(x, y_0)$ und $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $v : y \mapsto f(x_0, y)$. Falls x_0 eine globale Maximalstelle von u und y_0 eine globale Maximalstelle von v ist, dann ist (x_0, y_0) eine lokale Maximalstelle von f.

Intuitiv sollte klar sein, warum diese Aussage falsch ist. Als Gegenbeispiel stellen wir uns vor, dass wir auf einem Berg stehen, der in keiner der vier Himmelsrichtungen Nord, Süd, West und Ost (also in der x- und y-Richtung) einen höheren Punkt besitzt als den auf dem wir stehen, jedoch in nordöstlicher Richtung ansteigt.

Als mathematisches Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x,y) = (2x-1)(2y-1)$ und den Punkt $(x_0, y_0) = (1/2, 1/2)$. In diesem Fall sind die Funktionen u und v beide gleich 0, sie werden also jeweils an der Stelle x_0 bzw. y_0 maximiert; der Punkt (x_0, y_0) ist jedoch keine lokale Maximalstelle von f, da für jedes $r > 0$ der Punkt $(1/2 + r/2, 1/2 + r/2)$ in einer Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt $(1/2, 1/2)$ enthalten ist und $f(1/2 + r/2, 1/2 + r/2) > 0$ gilt.

√ (d) Angenommen, es existieren Funktionen $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $v : [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass $f(x,y) = u(x) + v(y)$ für alle $x, y \in [0,1]$ gilt. Falls x_0 eine globale Minimalstelle von u und y_0 eine globale Minimalstelle von v ist, so ist (x_0, y_0) eine globale Minimalstelle von f.

Da x_0 eine globale Minimalstelle von u und y_0 eine globale Minimalstelle von v ist, gilt für alle $x_1, y_1 \in [0,1]$

$$u(x_1) \geq u(x_0)$$

und

$$v(y_1) \geq v(y_1).$$

Foglich ist

$$f(x_1, y_1) = u(x_1) + v(y_1) \geq u(x_0) + v(y_0) = f(x_0, y_0)$$

und somit ist (x_0, y_0) eine globale Minimalstelle von f.

6. Sei f eine *beliebige* differenzierbare Funktion einer Variablen. Zeigen Sie, dass alle Tangentialebenen der Fläche

$$z = y \cdot f\left(\frac{x}{y}\right)$$

Siehe nächstes Blatt!

durch den Punkt $(0,0,0)$ gehen.

Lösung: Sei

$$F(x,y) := y\, f\big(\frac{x}{y}\big).$$

Dann gilt

$$F_x(x,y) = f'\big(\frac{x}{y}\big) \quad , \quad F_y(x,y) = f\big(\frac{x}{y}\big) - \frac{x}{y} f'\big(\frac{x}{y}\big).$$

Die Tangentialebene im Punkte $(x_0, y_0, F(x_0,y_0))$ (mit $y_0 \neq 0$) ist

$$\begin{aligned}
z &= F(x_0,y_0) + F_x(x_0,y_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\
&= y_0 f\big(\frac{x_0}{y_0}\big) + f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big)(x-x_0) + \left[f\big(\frac{x_0}{y_0}\big) - \frac{x_0}{y_0} f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big)\right](y-y_0) \\
&= x f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big) + y\left[f\big(\frac{x_0}{y_0}\big) - \frac{x_0}{y_0} f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big)\right] \\
&\quad + \underbrace{y_0 f\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big) - x_0 f'\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big) - y_0\left[f\big(\frac{x_0}{y_0}\big) - \frac{x_0}{y_0} f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big)\right]}_{=0} \\
&= x f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big) + y\left[f\big(\frac{x_0}{y_0}\big) - \frac{x_0}{y_0} f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big)\right].
\end{aligned}$$

Also liegt (0,0,0) auf diesen Tangentialebenen, d. h. alle Tangentialebenen gehen durch den Nullpunkt.

7. Der für beliebige Dreiecke ABC gültige Kosinussatz lautet $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Schätzen Sie den relativen Fehler von c ab, wenn die Grössen a und b auf 1% und γ auf $0.5°$ genau gemessen werden.

Lösung: Auflösen der Gleichung liefert zunächst

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

Fasst man c als Funktion in den Variablen a, b und γ auf, so hat man die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
c_a(a,b,\gamma) &= \frac{2a - 2b\cos\gamma}{2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}} = \frac{a - b\cos\gamma}{c}, \\
c_b(a,b,\gamma) &= \frac{2b - 2a\cos\gamma}{2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}} = \frac{b - a\cos\gamma}{c}, \\
c_\gamma(a,b,\gamma) &= \frac{2ab\sin\gamma}{2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}} = \frac{ab\sin\gamma}{c}.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$dc = \frac{a - b\cos\gamma}{c}\, da + \frac{b - a\cos\gamma}{c}\, db + \frac{ab\sin\gamma}{c}\, d\gamma$$

Bitte wenden!

oder

$$\begin{aligned}
\frac{dc}{c} &= \frac{a - b\cos\gamma}{c^2}\,da + \frac{b - a\cos\gamma}{c^2}\,db + \frac{ab\sin\gamma}{c^2}\,d\gamma \\
&= \frac{a^2 - ab\cos\gamma}{c^2}\,\frac{da}{a} + \frac{b^2 - ab\cos\gamma}{c^2}\,\frac{db}{b} + \frac{ab\sin\gamma}{c^2}\,d\gamma \\
&= \left(\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}{2c^2} + \frac{a^2 - b^2}{2c^2}\right)\frac{da}{a} + \left(\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}{2c^2} + \frac{b^2 - a^2}{2c^2}\right)\frac{db}{b} \\
&\quad + \frac{ab\sin\gamma}{c^2}\,d\gamma \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{c^2}\right)\frac{da}{a} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{c^2}\right)\frac{db}{b} + \frac{ab\sin\gamma}{c^2}\,d\gamma.
\end{aligned}$$

Der relative Fehler ist also annähernd

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta c}{c} &\approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{c^2}\right)\frac{\Delta a}{a} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{c^2}\right)\frac{\Delta b}{b} + \frac{ab\sin\gamma}{c^2}\Delta\gamma \\
&= \frac{\Delta a}{a} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{c^2}\right)\left(\frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta a}{a}\right) + \frac{ab\sin\gamma}{c^2}\Delta\gamma \\
&= \frac{1}{100} + \frac{ab\sin\gamma}{c^2}\,\frac{\pi}{360}.
\end{aligned}$$

8. Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) := xy\,(2x - 5y)$$

auf dem abgeschlossenen Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$, $(2,0)$.

Lösung: Wir betrachten $f(x,y) = 2x^2y - 5xy^2$ im Quadrat $[0,2] \times [0,2]$. Da die Funktion f überall differenzierbar ist, sind die Randpunkte und die gemeinsamen Nullpunkte der Ableitungen nach x und y im Inneren des Definitionsbereiches (d.h. in $(0,2) \times (0,2)$) zu untersuchen.

- Im Inneren erhalten wir:

  $$f_x(x,y) = 4xy - 5y^2 \quad \text{und} \quad f_y(x,y) = 2x^2 - 10xy.$$

  Aus $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ folgt $x = y = 0$, aber $(0,0) \notin (0,2) \times (0,2)$. Deshalb sind keine Extremalstellen im Inneren.

- Im Rand betrachten wir separat die Punkte im "Inneren" des Randes und die Eckpunkte:
  - Wenn $(x,y) \in \{0\} \times (0,2)$, dann ist $f(0,y) = 0$ konstant. Daher sind alle Punkte in diesem Teil des Randes Kandidate.
  - Wenn $(x,y) \in \{2\} \times (0,2)$, dann ist $f(2,y) = 8y - 10y^2$. Wir bestimmen die möglichen Extrema von $y \mapsto f(2,y)$ als Funktion einer Variablen. Nach Nullsetzen der Ableitung erhalten wir als Kandidat den Punkt $(2, \frac{2}{5})$, mit $f(2, \frac{2}{5}) = \frac{8}{5}$.
  - Wenn $(x,y) \in (0,2) \times \{0\}$, dann ist $f(x,0) = 0$ konstant.
  - Wenn $(x,y) \in (0,2) \times \{2\}$, dann ist $f(x,2) = 4x^2 - 20x$. Nach Nullsetzen der Ableitung dieser Funktion, erhält man den Punkt $(5/2,\ 2)$, der nicht zum Definitionsbereich gehört. Daher entsteht aus diesem Teil des Randes keine Extremalstelle.
  - Für die Eckpunkte haben wir $f(0,0) = f(0,2) = f(2,0) = 0$ und $f(2,2) = -24$.

Siehe nächstes Blatt!

Nach Vergleich aller möglicher Extremalwerte fassen wir zusammen:

- Globales Maximum: $\frac{8}{5}$ im Punkt $(2, \frac{2}{5})$; und
- Globales Minimum: -24 im Punkt $(2, 2)$.

9. Gegeben ist die Funktion

$$f : (x, y) \longmapsto \frac{y}{x^2 + y^2} \ .$$

a) Bestimmen Sie den (aufgrund der gegebenen Formel grösstmöglichen) Definitionsbereich sowie den (zugehörigen) Wertebereich von f.

b) Diskutieren Sie die Niveaulinien von f und zeichne sie für die Funktionswerte -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$ und 1 auf.

c) Ermittlen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt $(1, 1, \frac{1}{2})$.

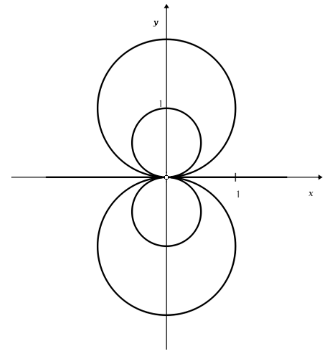
Lösung:

d) Definitionsbereich $D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$: für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist $x^2 + y^2 > 0$ und somit $f(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$.
Für $(x, y) = (0, 0)$ ist $f(x, y)$ nicht definiert. Also $D(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.
Wertebereich $W(f) \subseteq \mathbb{R}$: $f(1, 0) = 0$ und für $z \neq 0$ ist $f\big(0, \frac{1}{z}\big) = z$. Also $W(f) = \mathbb{R}$.

e) Niveaulinien: $\frac{y}{x^2+y^2} = c$
Im Fall $c = 0$ ist die Niveaulinie die x-Achse ohne den Punkt $(0, 0)$.
Im Fall $c \neq 0$ schreiben wir $x^2 + y^2 - \frac{y}{c} = 0$, ergänzen quadratisch und erhalten

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2} \qquad (x, y) \neq (0, 0).$$

Kreis mit Mittelpunkt $M\big(0, \frac{1}{2c}\big)$ und Radius $r = \frac{1}{2|c|}$ ohne den Punkt $(0, 0)$.



f) Gleichung der Tangentialebene des Graphen von f über dem Punkt (x_0, y_0):

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0).$$

Es ist

$$f_x(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}\,, \quad f_y(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \implies f_x(1, 1) = -\frac{1}{2}\,, \quad f_y(1, 1) = 0.$$

Die gesuchte Tangentialebene hat also die Gleichung

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,(x - 1) \quad \text{das ist} \quad x + 2z = 2.$$