Lösung - Serie 23

1. Gegeben ist eine lineare und homogene Differenzialgleichung, welche $y : x \mapsto \sin x$ als Lösung besitzt. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $x \mapsto \cos x$ ist ebenfalls eine Lösung.

(b) $x \mapsto \sin(2x)$ ist ebenfalls eine Lösung.

√ (c) $x \mapsto 2\sin(x)$ ist ebenfalls eine Lösung.

(d) $x \mapsto \sin(x) + 2x$ ist ebenfalls eine Lösung.

Von den angegebenen Varianten lässt sich nur $2\sin(x)$ als Linearkombination von der gegebenen Lösung schreiben.

2. Welche der folgenden Aussagen stimmen?

(a) Jede separierbare Differentialgleichung ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

(b) Jede lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

√ (c) Jede homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

(d) Jede homogene Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

Eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung hat die Form $y' = p(x)y$ und ist damit separierbar. Für alle anderen Aussagen lassen sich Gegenbeispiele finden. Richtig ist also (c).

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differenzialgleichung

$$2y'' - y' - 6y = e^{3x}.$$

(a) $y(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}x}$.

√ (b) $y(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{9}e^{3x}$.

(c) $y(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{9}e^{3x}$.

Durch Einsetzen bekommen wir das Resultat. Der Eindeutigkeitssatz garantiert, dass nur eine Funktion die DGL löst.

4. Das Wachstum einer Taufliegen-Population unter Laborbedingungen kann näherungsweise durch die Differenzialgleichung

$$\dot{f}(t) = 0.0006 \cdot (350 - f(t)) \cdot f(t)$$

beschrieben werden. Dabei bezeichnet $f(t)$ die Anzahl der Taufliegen zur Zeit t in Tagen. Für welche Zahlen $a > 0$ ist die Funktion

$$f(t) = \frac{350}{a \cdot e^{-0.21t} + 1}$$

eine Lösung der Differenzialgleichung?

(a) Für kein a.

(b) Nur für $a = 350 = \lim_{t\to\infty} f(t)$.

(c) Nur für $a = \log|-0.21|$.

(d) Nur für $a = \log\left|\frac{1}{-0.21}\right|$.

√ (e) Für jedes a.

Wir berechnen zunächst die Ableitung der angegebenen Funktion.
Zum Beispiel mit Hilfe der Quotientenregel folgt

$$f'(t) = \frac{350 \cdot 0,21 \cdot a \cdot e^{-0,21\cdot t}}{(ae^{-0,21\cdot t} + 1)^2} = \frac{73,5 \cdot a \cdot e^{-0,21\cdot t}}{(ae^{-0,21\cdot t} + 1)^2}.$$

Jetzt setzen wir die angegebene Funktion in die rechte Seite der DGL ein und erhalten

$$0,0006 \cdot \left(350 - \frac{350}{ae^{-0,21\cdot t} + 1}\right) \cdot \frac{350}{ae^{-0,21\cdot t} + 1} = \frac{73,5 \cdot a \cdot e^{-0,21\cdot t}}{(ae^{-0,21\cdot t} + 1)^2} = f'(t).$$

Also ist die angegebene Funktion für jedes $a > 0$ eine Lösung der DGL.

5. Klicken Sie die *richtigen* Aussagen an:

Die Differenzialgleichung $y' = \frac{1}{x^2}y + \sin x$

√ (a) ist linear.

(b) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

(c) ist separierbar.

(d) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

Eine Differenzialgleichung 1. Ordnung heisst linear, wenn sie von der Form

$$y' = p(x) \cdot y + q(x)$$

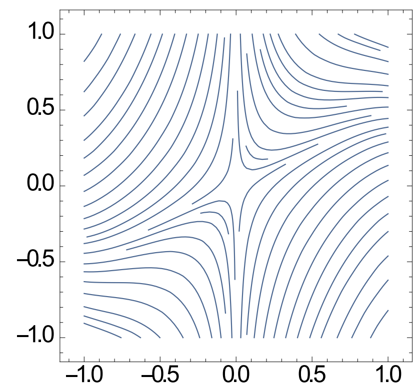
ist, wobei $x \mapsto p(x)$ und $x \mapsto q(x)$ beliebige Funktionen von x sind. Das ist genau unseren Fall mit $p(x) = \frac{1}{x^2}$ und $q(x) = \sin x$. Die Differenzialgleichung $y' = \frac{1}{x^2}y + \sin x$ ist nicht separierbar und wird nicht durch die gegebenen Substitutionen gelöst.

6.

Siehe nächstes Blatt!

Finden Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = -\frac{y}{x} + \cos\left(x^2\right).$$



Die Lösungskurven sehen Sie rechts.

Lösung: $y' = -\frac{y}{x} + \cos\left(x^2\right)$ ist eine inhomogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung (Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite $36 - 40$). Wir suchen eine allgemeine Lösung y_h der zugehörigen (separierbaren) homogenen Differenzialgleichung:

$$y' = -\frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \Longrightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C \ \ , C \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \quad y_h(x) = K \cdot \frac{1}{x} \ \ , K := \pm e^C.$$

Wir sehen, dass natürlich auch $K = 0$ eine Lösung der homogenen Gleichung gibt, dh. im Allgemeinen haben wir $K \in \mathbb{R}$.

Nun brauchen wir noch eine partikuläre Lösung y_p der Differenzialgleichung $y' = -\frac{y}{x} + \cos\left(x^2\right)$. Dazu wenden wir die Methode von Lagrange an (Variation der Konstanten, Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 41):
Wir setzen

$$y_p(x) = \gamma(x) \cdot y_h(x) = \gamma(x) \cdot K\frac{1}{x},$$

wobei γ eine Funktion ist, die wir noch zu bestimmen haben. (Es würde genügen, eine beliebige nichttriviale Lösung $\tilde{y}_h$ der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung zu nehmen und $y_p(x) = \gamma(x) \cdot \tilde{y}_h(x)$ zu setzen. Hier könnte man zum Beispiel $K = 1$ setzen, also $\tilde{y}_h(x) = \frac{1}{x}$.) Den Ansatz eingesetzt in $y' = -\frac{y}{x} + \cos\left(x^2\right)$, liefert nach Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 41 und 42,

$$\gamma'(x) = \frac{\cos\left(x^2\right)}{y_h(x)} = \frac{\cos\left(x^2\right)}{K\frac{1}{x}} = \frac{2x\cos\left(x^2\right)}{2K} \tag{1}$$

$\Big(q(x) := \cos\left(x^2\right)$ ist das Störglied oder inhomogene Glied (siehe Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 36)$\Big)$. Es folgt

$$\gamma(x) = \frac{\sin\left(x^2\right)}{2K} \tag{2}$$

(die Integrationskonstante kann null gesetzt werden, da wir nur eine partikuläre Lösung brauchen). Damit ist

$$y_p(x) = \frac{\sin\left(x^2\right)}{2K} \cdot K\frac{1}{x} = \frac{\sin\left(x^2\right)}{2x}.$$

Bitte wenden!

Die allgemeine Lösung von $y' = -\frac{y}{x} + \cos\left(x^2\right)$ ist somit (Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 40)

$$y(x) = y_h\left(x\right) + y_p\left(x\right) = K\frac{1}{x} + \frac{\sin\left(x^2\right)}{2x}.$$

7. Man bestimme die Gleichung der durch den Punkt $(1,1)$ gehenden Lösungskurve der Differentialgleichung

$$(y^2 - 3x^2) + 2xyy' = 0.$$

Lösung: Diese Differentialgleichung ist exakt, wie man leicht bestätigt. Die Lösungen sind die Niveaulinien der Funktion $g(x,y)$ mit den partiellen Ableitungen

$$g_x = y^2 - 3x^2 \quad \text{und} \quad g_y = 2xy.$$

Integrieren ergibt

$$g(x,y) = \int g_x \, \mathrm{d}x = \int (y^2 - 3x^2) \, \mathrm{d}x = y^2 x - x^3 + k(y)$$
$$g(x,y) = \int g_y \, \mathrm{d}y = \int 2xy \, \mathrm{d}y = xy^2 + l(x)$$

und daraus folgt, dass

$$g(x,y) = xy^2 - x^3.$$

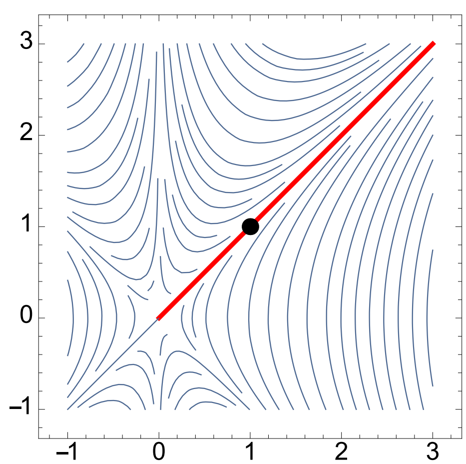
Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also durch die Schar

$$xy^2 - x^3 = C$$

gegeben. Die durch $(1,1)$ gehende Lösung ist die Niveaulinie zum Niveau 0, denn $C = g(1,1) = 0$. Wir bemerken, dass

$$xy^2 - x^3 = x(y-x)(y+x) = 0.$$

Deshalb besteht das Niveau 0 aus den drei Geraden $x = 0, y = x, y = -x$. Die Lösung ist dann in einer Umgebung von $(1,1)$ die Gerade $y = x$ (z.B. in $(0,\infty)$.)

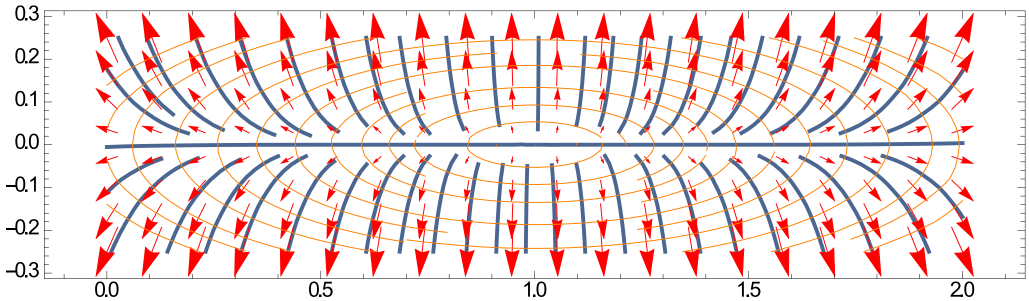


Siehe nächstes Blatt!

8. **a)** Man bestimme ein ebenes Vektorfeld $\vec{v}$, welches in jedem Punkt in $\mathbb{R}^2$ eine Ellipse der durch $c > 0$ parametrisierten Schar

$$(x-1)^2 + 9y^2 = c$$

senkrecht schneidet.



b) Man bestimme die Feldlinien des in (a) gefundenen Vektorfeldes $\vec{v}$.

Lösung:

c) Es sei $f(x,y) := (x-1)^2 + 9y^2$; dann ist $\vec{v} = \textbf{grad}\ f$ ein Vektorfeld der verlangten Art, also

$$\vec{v} = (2(x-1),\ 18y)\,.$$

d) Die Feldlinien des in (a) gefundenen Vektorfeldes genügen der Differentialgleichung

$$y' = \frac{9y}{x-1}.$$

Diese Gleichung ist separierbar. Die Integration

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{9y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$$

ergibt $y = C \cdot (x-1)^9$, für eine reelle Konstante C.

Bitte wenden!

9. Man bestimme die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar

$$\frac{y-1}{x-1} = C.$$

Man skizziere diese Trajektorien.

Lösung: Nach Ableiten erhält man $\frac{y'(x-1)-(y-1)}{(x-1)^2} = 0$. Somit ist $y' = \frac{y-1}{x-1}$ die Differentialgleichung der Kurvenschar und entsprechend $y' = -\frac{x-1}{y-1}$ die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien. Diese ist separierbar.

Man findet als Lösung

$$\begin{aligned}
dy(y-1) &= -dx(x-1) \\
\int (y-1)dy &= -\int (x-1)dx \\
\frac{1}{2}y^2 - y &= -(\frac{1}{2}x^2 - x) + C_1 \\
\frac{1}{2}y^2 - y + \frac{1}{2}x^2 - x &= C_1 \\
(y-1)^2 + (x-1)^2 &= C
\end{aligned}$$

Die Orthogonaltrajektorien sind also Kreise mit Zentrum $(1,1)$.