

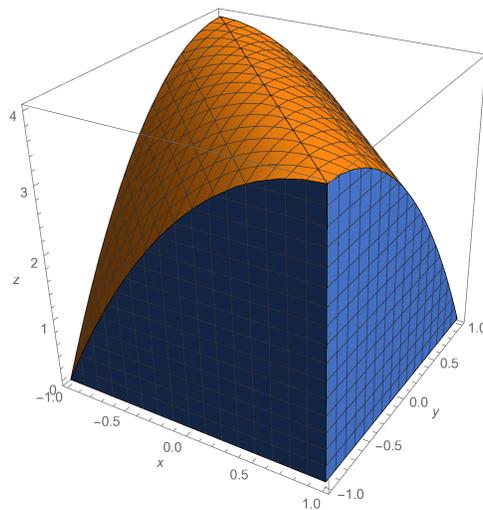
Schnellübung 10

Bemerkung: Diese Schnellübung wird am Mittwoch, dem 18.04.2018, während der Übungsstunde gelöst.

1. Es bezeichne S die Region

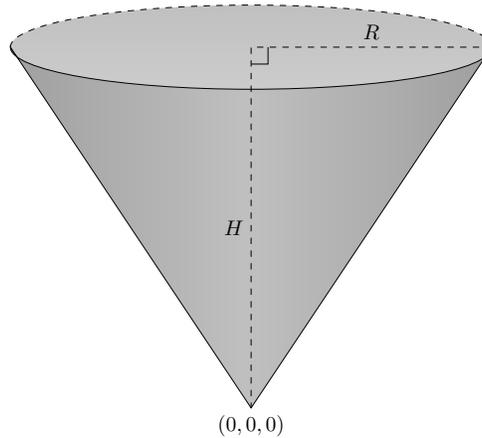
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 4 - (x + y)^2\}.$$

Verwenden Sie den Divergenzatz um den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v} = (2xy, -y^2, z^2)$ durch S (von innen nach aussen) zu berechnen.



Bitte wenden!

2. Gegeben sei eine Strömung mit Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = (2x^2, y, 1 - z)$. Welche Menge strömt (von aussen nach innen) pro Zeiteinheit durch die Mantelfläche des geraden Kreiskegels mit Radius R und Höhe H parallel zur z -Achse mit Spitze im Ursprung?



3. Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein endlicher Bereich mit Rand ∂B und seien f, g zweimal stetig differenzierbare Skalarfelder. Beweisen Sie die Greenschen Identitäten, die in der Potentialtheorie und in der Elektrodynamik gebraucht werden.

- a) Erste Greensche Identität

$$\iint_{\partial B} (f \cdot \mathbf{grad} g) \cdot \vec{n} \, dO = \iiint_B (f \cdot \Delta g + \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{grad} g) \, dV$$

Hinweis: Wenden Sie den Divergenzansatz für das Vektorfeld $f \cdot \mathbf{grad} g$ an.

- b) Zweite Greensche Identität

$$\iint_{\partial B} (f \cdot \mathbf{grad} g - g \cdot \mathbf{grad} f) \cdot \vec{n} \, dO = \iiint_B (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f) \, dV$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Berechnen Sie die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \mapsto (yz, xyz, xy)$$

entlang des geschlossenen Weges Γ (siehe Figur) leistet. Die einzelnen Teilabschnitte des Weges Γ haben dabei Länge 1.

