Serie 26

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis **Mittwoch, 06.06.2018 um 12.00 Uhr** ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Mittwoch, 06.06.2018, im Fächli Ihres Hilfsassistenten im Raum HG J 68.

Homepage: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-0262-GXL/`

Die MC-Frage 4 und Aufgabe 9 (durch $(*)$ markiert) enthalten Material aus Kapitel 7, Abschnitt 14 im Stammbach, welches zur Zeit der Veröffentlichung dieser Serie in der Vorlesung noch nicht behandelt worden sein wird.

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Es ist das folgende autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 + 3 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}$$

von linearen Differenzialgleichungen 1. Ordung gegeben. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Es gibt keinen Gleichgewichtspunkt.

(b) $(0, 0)$ ist Gleichgewichtspunkt.

(c) $(1, -2)$ ist Gleichgewichtspunkt.

(d) $(-1, 2)$ ist Gleichgewichtspunkt.

2. Betrachten Sie das folgende System

$$\begin{cases} \dot{x} = bx - y \\ \dot{y} = x - by. \end{cases}$$

Für $b = 1$ ist die Lösung zu den Anfangsbedingungen $x(0) = 1, y(0) = 0$ gleich...
(*Hinweis*: Betrachten Sie $u(t) = x(t) + y(t)$, $v(t) = x(t) - y(t)$.)

(a) $x(t) = e, y(t) = te^t$

(b) $x(t) = t + 1, y(t) = t$

(c) $x(t) = t, y(t) = t$

(d) $x(t) = e^t, y(t) = te^t$

3. Für die Lösung $(x(t), y(t))$ des Systems

$$\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = 4\,x, \\ \dot{x} - \dot{y} = 6\,y, \end{cases}$$

welche die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ erfüllt, gilt

(a) $x(1) + y(1) = 2e^3$.

(b) $2x(1) + y(1) = 2e^3$.

(c) $x(1) + 2y(1) = 2e^3$.

(d) $x(1) + y(1) = e^3$.

4. $(*)$ Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, so dass im folgenden System $(0, 0)$ ein Gleichgewichts punkt ist:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \frac{1}{4}y \\ \dot{y} = sx - y. \end{cases}$$

(a) $s \leq 0$

(b) $s \leq 4$

(c) $0 \leq s \leq 4$

Siehe nächstes Blatt!

5. Welche der folgenden Aussagen über die Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$$

sind korrekt?

(a) Für eine Potenzreihe $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, die die Gleichung löst, gilt $(n+2)a_{n+2} + a_n = 0$ für $n \geq 0$.

(b) Die eindeutige Lösung mit $y(0) = 0, y'(0) = 1$ ist eine gerade Funktion, dh. $y(-x) = y(x)$.

(c) Die eindeutige Lösung mit $y(0) = 1, y'(0) = 0$ ist $y(x) = e^{-x^2/2}$.

(d) Jede Lösung y erfüllt entweder $y(-x) = y(x)$ oder $y(-x) = -y(x)$.

Bitte wenden!

6. Die folgende Differentialgleichung beschreibt die Funktion $t \to \varphi(t)$ der Winkelverschiebung eines Pendels:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi) = 0, \tag{1}$$

wobei g die Erdanziehung und ℓ die Länge des Pendels bezeichnen. Approximieren wir $\sin(\varphi)$ durch φ, so erhalten wir die folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0 \tag{2}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) (2) ist die Differentialgleichung einer ungedämpften Schwingung.

(b) Die Lösung von (2) mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ ist periodisch und die Periode ist unabhängig von φ_0.

(c) Jede Lösung von (2) ist periodisch und die Periode ist unabhängig von ℓ.

(d) Die Lösungen von (1) und (2) mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ gleichen einander mehr wenn $\varphi_0 = \pi/100$ als wenn $\varphi_0 = \pi/2$ ist.

Übungsaufgaben

7. Man löse die Differentialgleichungssysteme

a) $$\begin{cases} \dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= -x - 3y \\ x(0) &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dot{x} &= -7x + 4y \\ \dot{y} &= -9x + 5y + e^{-t} \\ x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \dot{x} &= 2x - y \\ \dot{y} &= x + 2y \end{cases}$$

8. Für folgende Differentialgleichungssysteme bestimme man das Phasenporträt. Man erstelle eine Skizze inklusive des Durchlaufsinns der Kurven.

a) $$\begin{cases} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= x^2 + y \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dot{x} &= 2x \\ \dot{y} &= \frac{x}{y} \end{cases}$$

Siehe nächstes Blatt!

9. $(*)$ Finden Sie alle Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)^2 + y(t)^2 - 1\\ \dot{y}(t) &= x(t)^2 - y(t)^2.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie, welche Gleichgewichtspunkte stabil sind.
Hinweis: Betrachten Sie für die Stabilität das linearisierte System.

10. Bestimme das Taylorpolynom 6. Ordnung der Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + xy'(x) + x^2 y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

11. Finden Sie eine Rekursionsformel für die Taylor-Koeffizienten a_n der Lösung $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ des Anfangswertproblems

$$y''(x) + x^3 y(x) = x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

und bestimme $a_0, a_1, \ldots, a_{10}$.