

**Multiple Choice.** Die folgenden acht Aufgaben sind Multiple Choice-Aufgaben. Bei jeder Aufgabe gibt es 4 Aussagen, die wahr oder falsch sind. Für 4 korrekte Antworten gibt es 4 Punkte, für 3 korrekte Antworten gibt es 2 Punkte, in allen anderen Fällen gibt es 0 Punkte. Insbesondere lohnt es sich zu raten!

1. (Fibonacci) Es sei  $(f_n)_{n \geq 0}$  die Fibonacci Folge, gegeben durch

$$f_0 = 1, f_1 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad \text{wobei } n \geq 1.$$

Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

- (a) **(Richtig)** Die Folge  $(f_n)_{n \geq 0}$  ist monoton wachsend.
- (b) **(Falsch)** Die Folge  $(f_n)_{n \geq 0}$  ist beschränkt.
- (c) **(Richtig)** Falls der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$  existiert, dann existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_{n+1}^2}{f_n^2}$  ebenfalls.
- (d) **(Richtig)** Die Folge  $\left(\frac{f_{n+2} - f_{n+1}}{f_n^2}\right)_{n \geq 0}$  ist eine Nullfolge.
2. (Extremalwerte) Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie für *alle* nicht-konstanten Polynome fünften Grades  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gelten *muss*.
- (a) **(Richtig)**  $p$  hat mindestens eine reelle Nullstelle.
- (b) **(Falsch)**  $p$  hat mindestens einen Sattelpunkt.
- (c) **(Falsch)**  $p$  hat mindestens eine lokale Extremalstelle.
- (d) **(Richtig)** Es sei  $z \in \mathbb{C}$  eine komplexe Zahl, so dass  $p(z) = 0$ , dann gilt ebenfalls  $p(\bar{z}) = 0$ .
3. (Funktionen) Es sei die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \exp(-x^2/2)$$

gegeben. Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

- (a) **(Falsch)** Die Funktion  $f$  ist injektiv.
- (b) **(Richtig)** Die Funktion  $f$  ist gerade.
- (c) **(Richtig)** Die Funktion  $f$  ist stetig.
- (d) **(Richtig)** Es gilt  $\ln(f(x)) \leq 0$  für alle reellen Zahlen  $x \in \mathbb{R}$ .

4. (Größenordnungen von Funktionen) Es sei die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^3 + x$$

gegeben. Welche der folgenden Größenordnungen gelten, wenn  $x \rightarrow +\infty$ ?

- (a) **(Richtig)**  $\cos(x) = o(f(x))$ .
- (b) **(Falsch)**  $\cosh(x) = o(f(x))$ .
- (c) **(Falsch)**  $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x = o(f(x))$ .
- (d) **(Falsch)**  $\ln(x) \ln(e^x - x) \ln(e^{x^2} - x^2) = o(f(x))$ .

*Hinweis:* Beachten Sie

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}).$$

5. (Krümmung) Wir betrachten die Ellipse  $E$  gegeben durch die folgende Parameterdarstellung

$$\vec{\gamma}(t) = (7 \cos(t), 5 \sin(t)), \quad \text{wobei } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Es sei  $\kappa_m$  die minimale Krümmung von  $\vec{\gamma}(t)$ . Bestimmen Sie bei folgenden Aussagen jeweils, ob sie falsch oder wahr ist.

- (a) **(Falsch)** Die Krümmung ist minimal für  $t = \pi$ .
- (b) **(Falsch)**  $\kappa_m = \frac{1}{5}$ .
- (c) **(Falsch)** Die Krümmung  $\kappa(t)$  erfüllt  $\kappa(t + \frac{\pi}{2}) = \kappa(t)$  für  $t \in [0, \frac{3}{2}\pi]$ .
- (d) **(Falsch)** Die Krümmung ist überall negativ.

*Hinweis:* Die Krümmung einer Kurve  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , wobei  $t \in [a, b]$ , ist gegeben durch

$$\kappa(t) = \frac{\dot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

6. (Rotationsvolumen Theorie) Wir bezeichnen für  $i = 1, 2$  mit  $K_i$  den Rotationskörper, der durch Rotation einer positiven stetigen Funktion  $f_i: [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$  an der  $x$ -Achse entsteht. Es sei  $V_i := \pi \int_0^1 f_i(x)^2 dx$  das Volumen des Rotationskörpers  $K_i$ . Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

- (a) **(Falsch)** Falls  $\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 f_2(x) dx$ , dann haben  $K_1$  und  $K_2$  dasselbe Volumen.
- (b) **(Richtig)** Falls  $f_1(t) \leq f_2(t)$  für alle  $t \in [0, 1]$  gilt, dann ist  $V_1 \leq V_2$ .
- (c) **(Falsch)** Falls  $f_1(t) = at$ , wobei  $a > 0$ , dann ist  $V_1 = \frac{\pi a^3}{3}$ .
- (d) **(Falsch)** Der Rotationskörper der Funktion  $f_1(x) \cdot f_2(x)$  hat Volumen  $V_1 \cdot V_2$ .

7. (Zwischenwertsatz) Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine *stetige* Funktion mit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist

- (a) **(Richtig)** Es gibt eine reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$ , so dass  $f(x) = x$ .
- (b) **(Falsch)** Es gibt eine reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$ , so dass  $f(x) = -x$ .
- (c) **(Falsch)** Es gibt eine reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$ , so dass  $f(x) = 0$ .
- (d) **(Richtig)** Es gibt eine reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$ , so dass  $f(-2x) = -2$ .

8. (Konvergenz von Reihen) Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Reihen, ob sie konvergent ist.

- (a) **(Falsch)** Die Reihe  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  konvergiert.
- (b) **(Richtig)** Die Reihe  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$  konvergiert.
- (c) **(Richtig)** Die Reihe  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{2^n}$  konvergiert.
- (d) **(Falsch)** Die Reihe  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^n}$  konvergiert.

**Single Choice.** Die folgenden achtzehn Aufgaben sind Single Choice-Aufgaben, d.h. genau eine der Antwortmöglichkeiten stimmt. Für jede richtige Antwort gibt es 2 Punkte, für eine falsche Antwort oder keine Antwort 0 Punkte. Schliessen Sie falsche Antworten aus und raten Sie, wo Sie nicht sicher sind!

9. (Bogenlänge) Ein Teilstück der Klothoide sei durch die Parameterdarstellung  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  mit

$$x(t) = \int_0^t \cos(\tau^2) d\tau, \quad y(t) = \int_0^t \sin(\tau^2) d\tau, \quad \text{wobei } 0 \leq t \leq 2018.$$

gegeben. Die Bogenlänge der Kurve  $\gamma$  ist gegeben durch

(a) 
$$\int_0^{2018} \sqrt{\sin(\tau^2) + \cos(\tau^2)} d\tau.$$

(b) 
$$\int_0^{2018} \sqrt{2\tau \sin(\tau)^2 + 2\tau \cos(\tau)^2} d\tau.$$

(c) **(Richtig)** 
$$\int_0^{2018} \sqrt{\sin(\tau^2)^2 + \cos(\tau^2)^2} d\tau.$$

(d) 
$$\int_0^{2018} \sqrt{4 \sin(\tau^2)^2 + 4 \cos(\tau^2)^2} d\tau.$$

*Hinweis:* Die Bogenlänge einer Kurve  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , wobei  $t \in [a, b]$ , ist gegeben durch

$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

10. (Grenzwerte) In welchem der folgenden Intervalle liegt der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} \sin(2\pi/x)?$$

- (a)  $(-\infty, 2)$ .  
 (b) **(Richtig)**  $[2, 6]$ .  
 (c)  $(6, +\infty)$ .  
 (d) Der Grenzwert existiert nicht.

11. (Volumenberechnung) Gabriels Horn ist der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den Graphen der Funktion

$$x \mapsto \frac{1}{x}, \quad \text{wobei } x \geq 1$$

in einem dreidimensionalen Koordinatensystem um die  $x$ -Achse rotiert. Wie gross ist das Volumen  $V$  von Gabriels Horn?

- (a) (Richtig)  $V = \pi$ .
- (b)  $V = 2\pi$ .
- (c)  $V = \frac{\pi}{2}$ .
- (d)  $V = +\infty$ .

*Hinweis:* Das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation des Graphen der Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  um die  $x$ -Achse entsteht, ist gegeben durch:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

12. (Oberflächenberechnung) Die ebene Kurve

$$x(t) = \int_0^t \sqrt{2 - e^{-2s}} ds, \quad y(t) = e^{-t}, \quad \text{wobei } t \in [0, +\infty)$$

wird um die  $x$ -Achse rotiert. Wie gross ist die Mantelfläche  $M$  des dabei entstehenden Rotationskörpers?

- (a)  $M = 2\pi$ .
- (b) (Richtig)  $M = 2\sqrt{2}\pi$ .
- (c)  $M = +\infty$ .
- (d)  $M = \pi$ .

*Hinweis:* Die Mantelfläche des Rotationskörpers, der durch die Rotation des Graphen der parametrisierten Kurve  $[t_A, t_B] \mapsto (x(t), y(t))$  entsteht, ist gegeben durch:

$$M = 2\pi \int_{t_A}^{t_B} y(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

13. (Polarkoordinaten) Die *Zissoide des Diokles* ist in Parameterform gegeben durch

$$x(t) = \frac{2t^2}{1+t^2}, y(t) = \frac{2t^3}{1+t^2} \quad \text{wobei } t \in \mathbb{R},$$

beschrieben werden. Welcher der folgenden Ausdrücke entspricht der Zissoide des Diokles in Polarkoordinaten?

- (a) **(Richtig)**  $r = 2 \sin(\phi) \tan(\phi)$  mit  $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$ .
- (b)  $r = 2 \cos(\phi) \tan(\phi)$  mit  $-\pi < \phi < \pi$ .
- (c)  $r = \frac{2}{\cos(\phi)}$  mit  $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$ .
- (d)  $r = 2 \tan(\phi)$  mit  $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$ .

*Hinweis:* Beachten Sie

$$x(t) \cdot t = y(t) \quad \text{und} \quad \sin(\phi)^2 = \frac{\tan(\phi)^2}{1 + \tan(\phi)^2}.$$

14. (Taylorreihe) Was ist der Koeffizient  $a_2$  der Taylorreihe der Funktion

$$f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$$

um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ ?

- (a) **(Richtig)**  $a_2 = 1$ .
- (b)  $a_2 = -1$ .
- (c)  $a_2 = 0$ .
- (d)  $a_2 = 2$ .

15. (Asymptoten) Welche der folgenden Funktionen ist eine Asymptote für  $x \rightarrow +\infty$  der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 5}{5x - 5}, \quad \text{wobei } x > 1?$$

- (a)  $x \mapsto x^2$ .
- (b)  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ , wobei  $x > 1$ .
- (c)  $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{1-x}$ , wobei  $x > 1$ .
- (d) **(Richtig)**  $x \mapsto \frac{1}{5}x^2$ .

16. (Integrieren) Berechnen Sie folgendes Integral

$$\int_0^1 x \arctan(x) dx.$$

- (a)  $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ .
- (b) **(Richtig)**  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ .
- (c)  $\frac{\pi}{4}$ .
- (d)  $\frac{\pi}{2}$ .

*Hinweis:* Beachten Sie

$$\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

17. (zweite Ableitung) Es sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$x \mapsto 2 \sinh(x) \cosh(x).$$

Welche der folgenden Funktionen entspricht  $f'': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ?

- (a)  $f''(x) = 4 \sinh(x)$ .
- (b) **(Richtig)**  $f''(x) = 4 \sinh(2x)$ .
- (c)  $f''(x) = 4 \cosh(2x)$ .
- (d)  $f''(x) = 4 \cosh(x)$ .

*Hinweis:* Beachten Sie

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{und} \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

18. (Differentialquotient) Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebig oft differenzierbare Funktion und  $x_0 \in \mathbb{R}$  eine Zahl. Welche der folgenden Identitäten ist *immer* richtig?

- (a) **(Richtig)**  $f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}$ .
- (b)  $f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}$ .
- (c)  $f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}$ .
- (d)  $f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(x_0) - f(x_0+h) + f(x_0-h)}{h^2}$ .

*Hinweis:* Lösen Sie die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + \dots \\ f(x_0-h) &= f(x_0) - f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} - \dots \end{aligned}$$

nach  $f''(x_0)$  auf.

19. (Inverse Funktion) Es sei  $f$  die injektive Funktion mit Definitionsbereich  $D(f) = \mathbb{R}$  und Funktionsvorschrift

$$f(x) = \frac{1}{1 + ae^x} \text{ mit } a > 0.$$

Was ist der Definitionsbereich  $D(g)$  der Umkehrfunktion  $g$  von  $f$ ?

- (a)  $D(g) = (0, \infty)$ .
  - (b)  $D(g) = \mathbb{R}$ .
  - (c) **(Richtig)**  $D(g) = (0, 1)$ .
  - (d)  $D(g) = [0, 1]$ .
20. (Komplexe Zahlen I) Es sei die komplexe Zahl  $z = (1 + i)$  gegeben. Dann ist  $z^6$  gleich
- (a)  $-6i$ .
  - (b)  $6i$ .
  - (c) **(Richtig)**  $-8i$ .
  - (d)  $8i$ .
21. (Komplexe Zahlen II) Es sei  $z_0 \in \mathbb{C}$  eine Lösung der Gleichung  $z^5 = ia$ , wobei  $a > 1$ . Welche der folgenden komplexen Zahlen ist ebenfalls eine Lösung der Gleichung  $z^5 = ia$ ?
- (a)  $\overline{z_0}$ .
  - (b) **(Richtig)**  $-\overline{z_0}$ .
  - (c)  $z_0 \exp\left(i\frac{\pi}{5}\right)$ .
  - (d)  $\sqrt[5]{a}z_0$ .

22. (Potenzreihen) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(2x + \frac{1}{2}\right)^k.$$

- (a)  $\left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right]$ .
- (b)  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .
- (c) **(Richtig)**  $\left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ .
- (d)  $\mathbb{R}$ .

23. (Flächenberechnung) Was ist die richtige Formel für das Volumen eines Rotationsellipsoiden, der durch Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$

um die  $x$ -Achse entsteht?

- (a)  $\frac{4\pi}{3}ab$ .
- (b) **(Richtig)**  $\frac{4\pi}{3}ab^2$ .
- (c)  $\frac{4\pi}{3}a^2b$ .
- (d)  $\frac{4\pi}{3}a^2b^2$ .

*Hinweis:* Das Volumen  $V$  eines Ellipsoides mit Halbachsen  $u, v, w$  ist gegeben durch

$$V = \frac{4\pi}{3}uvw.$$

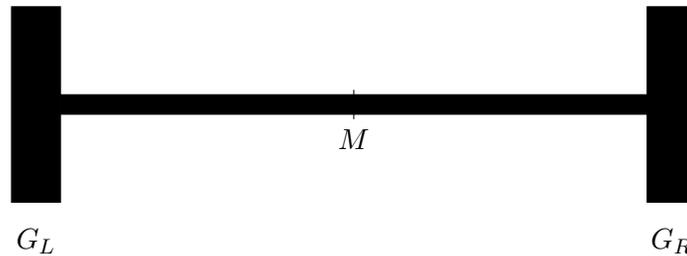
24. (Flächenträgheitsmoment) Es bezeichne  $K$  die Kreisscheibe in der  $x, y$ -Ebene mit Radius 1 und Scheibenzentrum im Koordinatenursprung. Bezüglich welcher der folgenden Achsen hat  $K$  das grösste Flächenträgheitsmoment?

- (a) Bezüglich der  $x$ -Achse.
- (b) **(Richtig)** Bezüglich der  $z$ -Achse.
- (c) Bezüglich der ersten Winkelhalbierenden in der  $x, z$ -Ebene.
- (d) Bezüglich der ersten Winkelhalbierenden in der  $x, y$ -Ebene.

25. (Koordinatentransformation) Gegeben sei die Parabel  $p(x) = x^2 + 2x + 1$ , wobei  $x \in \mathbb{R}$ , mit Scheitelpunkt bei  $(-1, 0)$ . Welche der folgenden Funktionen entspricht der Parabel  $q$ , die entsteht wenn man die Parabel  $p$  um 2 Einheiten nach rechts (d.h. in positiver  $x$ -Richtung) verschiebt und anschliessend mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  in  $y$ -Richtung staucht?

- (a)  $q(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$ .
- (b) **(Richtig)**  $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$ .
- (c)  $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$ .
- (d)  $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ .

26. (Schwerpunkt) Gegeben sei folgende Hantel  $H$



bestehend aus einem Gewicht  $G_L$  mit Masse 1, einem Gewicht  $G_R$  mit Masse 2 und einer homogenen Hantelstange mit Masse 1. Die Gewichte  $G_L$  und  $G_R$  sind am linken bzw. rechten Stangenende angebracht und ihre Schwerpunkte befinden sich jeweils in Abstand 1 zum Stangenmittelpunkt  $M$ . Wo befindet sich der Schwerpunkt  $S$  dieser Hantel?

- (a) Im Stangenmittelpunkt, d.h.  $M = S$ .
  - (b) **(Richtig)** Im Abstand  $1/4$  rechts von  $M$ .
  - (c) Im Abstand  $1/3$  rechts von  $M$ .
  - (d) Im Abstand  $1/2$  rechts von  $M$ .
-