Bedingte Dichten

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum mit gemeinsamer Dichte $f\colon \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$. Dann ist die Dichte von X gegeben durch

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy,$$

und die bedingte Verteilung von Y gegeben $X = x$ hat eine (bedingte) Dichte $f_{Y|X}(. \mid x)$.

Um die Form von $f_{Y|X}(. \mid x)$ für ein gegebenes $x \in \mathbb{R}$ heuristisch herzuleiten, nehmen wir an, dass $f_X(x) > 0$. Dann gilt für kleine $\delta > 0$,

$$P[x \leq X \leq x + \delta] \approx \delta f_X(x),$$

und für kleine $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\varepsilon f_{Y|X}(y \mid x) \approx P[y \leq Y \leq y + \varepsilon \mid X = x] \approx P[y \leq Y \leq y + \varepsilon \mid x \leq X \leq x + \delta] \\
&= \frac{P[x \leq X \leq x + \delta, y \leq Y \leq y + \varepsilon]}{P[x \leq X \leq x + \delta]} \approx \frac{\delta \varepsilon f(x,y)}{\delta f_X(x)} = \frac{\varepsilon f(x,y)}{f_X(x))}.
\end{aligned}$$

Daraus sieht man, dass

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_X(x)} & \text{falls } f_X(x) > 0 \\ 0 & \text{falls } f_X(x) = 0 \end{cases}$$

eine bedingte Dichte von Y gegeben $X = x$ ist.