Schwaches Gesetz der grossen Zahlen

Satz 1 (Schwaches Gesetz der grossen Zahlen)
Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum. Falls es Konstanten μ und σ gibt so dass

- $E[X_i] = \mu$ *für alle* $i = 1, 2, \ldots$
- $\operatorname{Var}(X_i) \leq \sigma^2$ *für alle* $i = 1, 2, \ldots$
- $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = 0$ *für alle* $i \neq j$,

dann gilt für $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$,

$$E\left[(\overline{X}_n - \mu)^2\right] \leq \frac{\sigma^2}{n} \quad \textit{und} \quad P\left[|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{1}{n}\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad \textit{für alle } \varepsilon > 0.$$

Insbesondere konvergiert die Folge $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots$ gegen μ in L^2 und in Wahrscheinlichkeit.

Beweis: Da $E[\overline{X}_n] = \mu$, hat man

$$E\left[(\overline{X}_n - \mu)^2\right] = \operatorname{Var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(X_i) \leq \frac{\sigma^2}{n}.$$

Mit der Chebyshev-Ungleichung folgt daraus

$$P\left[|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\operatorname{Var}(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{n}\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

□