Konvergenz von Zufallsvariablen

Definition 1 *Seien $X_1, X_2, ...$ und Y Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum.*

- *Man sagt, die Folge $X_1, X_2, ...$ konvergiert gegen Y in Wahrscheinlichkeit, falls*

$$\lim_{n\to\infty} P\left[|X_n - Y| > \varepsilon\right] = 0$$

  für jede Konstante $\varepsilon > 0$.

- *Für $p > 0$, sagt man die Folge $X_1, X_2, ...$ konvergiert gegen Y in L^p, falls*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[|X_n - Y|^p\right] = 0.$$

- *Man sagt, die Folge $X_1, X_2, ...$ konvergiert gegen Y P-fast sicher, falls*

$$P\left[\lim_{n\to\infty} X_n = Y\right] = P\left[\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = Y(\omega)\right\}\right] = 1.$$

Definition 2 *Seien $X_1, X_2, ...$ und Y Zufallsvariablen (möglicherweise definiert auf verschiedenen Wahrscheinlichkeitsräumen) mit Verteilungsfunktionen $F_1, F_2, ...$ und F_Y. Man sagt, die Folge $X_1, X_2, ...$ konvergiert gegen Y in Verteilung falls*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_Y(x) \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}, \textit{ wo } F_Y \textit{ stetig ist.}$$

Satz 3 *Für Zufallsvariablen $X_1, X_2, ...$ und Y (möglicherweise definiert auf verschiedenen Wahrscheinlichkeitsräumen) sind die folgenden äquivalent:*

- *Die Folge $X_1, X_2, ...$ konvergiert gegen Y in Verteilung*
- $\lim_{n\to\infty} E[f(X_n)] = E[f(Y)]$ *für jede beschränkte stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*