Momente und absolute Momente

Definition 1 *Sei X eine Zufallsvariable und $p \in \mathbb{R}_+$.*

- *Das p-te absolute Moment von X ist definiert durch $M_p := E[|X|^p]$ (kann ∞ sein)*
- *Falls $M_n < \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$, definiert man das n-the Moment von X durch $m_n := E[X^n]$*

Bemerkung 2 Falls $M_n < \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann hat man $|m_n| \leq M_n$.

Bemerkung 3 Falls X eine Dichte f_X hat, dann ist

$$M_p = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p f_X(x) dx.$$

Wenn zusätzlich $M_n < \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx.$$

Satz 4 *Sei X eine Zufallsvariable und $p, q \in \mathbb{R}_+$. Falls $p \leq q$ und $M_q < \infty$, dann $M_p < \infty$.*

Beweis:

$$E[|X|^p] = E\left[|X|^p I_{\{X \leq 1\}} + |X|^p I_{\{|X|>1\}}\right] \leq E\left[I_{\{X \leq 1\}}\right] + E\left[|X|^q I_{\{|X|>1\}}\right] < \infty.$$

$\square$