Momentenmethode

Modellannahmen:
Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Stichprobe, $\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$ der Parameterraum. Für jeden Parameter $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_m) \in \Theta$ sei $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. unter dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P_\vartheta)$. Des Weiteren nehmen wir an es gelte

i) $E_\vartheta[|X_1|^m] < \infty$ für jedes $\vartheta \in \Theta$,

ii) Für jedes $k = 1, \dots, m$ ist das k-te Moment
$$m_k^\vartheta := E_\vartheta[X_1^k]$$
der Stichprobenvariablen $X_1, \dots, X_n$ eine (bekannte) Funktion des Parametervektors $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$. Das bedeutet dass für jedes $k = 1, \dots, m$ gibt es eine (Borel-messbare) Funktion $g_k : \Theta \to \mathbb{R}$ so dass
$$m_k^\vartheta = g_k(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m), \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Methode:
1) Gegeben seien Realisierungen $x_1, \dots, x_n$.
2) Für jedes $k \in \{1, \dots, m\}$ bestimmen wir das k-te empirische Moment $\widehat{m}_k = \widehat{m}_k(x_1, \dots, x_n)$ der Realisierungen $(x_1, \dots, x_n)$, definiert durch
$$\widehat{m}_k(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k.$$
3) Wir betrachten das folgende Gleichungssystem mit $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ als Unbekannten
$$\widehat{m}_k(x_1, \dots x_n) = g_k(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m), \quad k = 1, \dots, m.$$
4) Wir setzen voraus (muss in einer konkreten Anwendung überprüft werden), dass das obige Gleichungssystem für jede Realisierung $(x_1, \dots, x_n)$ eine eindeutige Lösung $\widehat{\vartheta} = \widehat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n) \in \Theta$ besitzt, die von der Realisierung $(x_1, \dots, x_n)$ abhängt.
5) $\widehat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$ heisst dann *Momenten-Schätzer* des Parametervektors ϑ.

Beispiel: Normalverteilte Stichprobenvariablen
Sei $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt mit unbekanntem Parameter $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$. Demfalls haben wir
- $m = 2$,
- $\Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)$,
- $g_1(\mu, \sigma^2) = \mu, \quad g_2(\mu, \sigma^2) = \mu^2 + \sigma^2$.

Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem bestehend aus den folgenden 2 Gleichungen
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \mu, \qquad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \mu^2 + \sigma^2.$$
Wir lösen das obige Gleichungssystem auf und erhalten den Momenten-Schätzer $\widehat{\vartheta} := (\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2)$, welcher hier gegeben ist durch
$$\widehat{\mu}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i =: \overline{X}_n,$$
$$\widehat{\sigma}^2(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2.$$