

p-Wert

Motivation: Wir wollen versuchen zu schauen, wie "extrem" der *beobachtete Wert* der Teststatistik liegt, i.e. wie "extrem" der Wert $t(x_1, \dots, x_n)$ gegeben den Daten x_1, \dots, x_n unter der Nullhypothese ist.

Definition: Sei $\Theta_0 = \{\vartheta_0\}$. Der **p-Wert** ist die Wahrscheinlichkeit, unter der Nullhypothese einen mindestens so extremen Wert der Teststatistik zu beobachten, wie der aktuell beobachtete. Dabei bestimmt die Alternativhypothese, was als extremer gilt (genau gleich wie bei der Form des Verwerfungsbereichs).

Beobachtung: Wir können am p -Wert direkt den Testentscheid ablesen. Wenn der p -Wert kleiner als das Signifikanzniveau α ist, dann verwerfen wir die Nullhypothese, ansonsten nicht. Denn falls der p -Wert kleiner als α ist, dann liegt der beobachtete Wert der Teststatistik sicher im Verwerfungsbereich.

Beispiel Münzenwurf: $n = 10$, X_1, \dots, X_{10} i.i.d. $\sim \text{Ber}(\vartheta)$ unter P_ϑ für jedes $\vartheta \in \Theta = [0, 1]$.

Teststatistik: $T = t(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \text{Bin}(10, \vartheta)$ unter P_ϑ für jedes $\vartheta \in \Theta = [0, 1]$.

Daten: x_1, \dots, x_{10} so dass $t(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{10} x_i = 7$.

Fall 1: $H_0 : \vartheta = 0.5$, $H_A : \vartheta > 0.5$.

$$\mathbf{p\text{-Wert}} = P_{0.5}[T \geq 7] = 0.17$$

Schlussfolgerung: Bei Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ wird H_0 **nicht** verworfen.

Fall 2: $H_0 : \vartheta = 0.5$, $H_A : \vartheta < 0.5$.

$$\mathbf{p\text{-Wert}} = P_{0.5}[T \leq 7] = 0.94$$

Schlussfolgerung: Bei Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ wird H_0 **nicht** verworfen.

Fall 3: $H_0 : \vartheta = 0.5$, $H_A : \vartheta \neq 0.5$.

$$\mathbf{p\text{-Wert}} = P_{0.5}[T \geq 7] + P_{0.5}[T \leq 3] = 0.34$$

Schlussfolgerung: Bei Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ wird H_0 **nicht** verworfen.