Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition 1 *Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum heissen (stochastisch) unabhängig, falls*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n) \quad \textit{für alle } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Satz 2 *Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit einer gemeinsamen Dichte f sind genau dann unabhängig, falls*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n) \quad \textit{für alle } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Satz 3 *Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum sind die folgenden äquivalent:*

(i) *$X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig.*

(ii) *$E[g_1(X_1) \cdots g_n(X_n)] = E[g_1(X_1)] \cdots E[g_n(X_n)]$ für alle beschränkten (messbaren) Funktionen $g_1, \ldots, g_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

(iii) *$E[g_1(X_1) \cdots g_n(X_n)] = E[g_1(X_1)] \cdots E[g_n(X_n)]$ für alle (messbaren) Funktionen $g_1, \ldots, g_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass $E[|g_i(X_i)|] < \infty$ für alle $i = 1, \ldots, n$.*

Korollar 4 *Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind auch $g_1(X_1), \ldots, g_n(X_n)$ unabhängig für alle (messbaren) Funktionen $g_1, \ldots, g_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Korollar 5 *Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen, so dass $E[X^2] < \infty$ und $E[Y^2] < \infty$. Dann hat man* $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Beispiel 6 Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen, so dass $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und $Y = \pm 1$ mit Wahrscheinlichkeit je $1/2$. Dann hat man für $Z = XY$,

$$\mathrm{Cov}(X, Z) = E[XZ] = E[X^2 Y] = E[X^2]E[Y] = 0.$$

Wären X und Z unabhängig, dann würde aus Korollar 4 und Korollar 5 folgen, dass $\mathrm{Cov}(|X|, |Y|) = 0$. Aber man hat

$$\mathrm{Cov}(|X|, |Z|) = E[|X||Z|] - E[|X|]E[|Z|] = E[X^2] - E[|X|]^2 = \mathrm{Var}(|X|) = (\pi - 2)/\pi > 0.$$

Also können X und Z nicht unabhängig sein.