Varianz, Standard Abweichung, Kovarianz und Korrelation

Definition 1 *Seien X und Y Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Falls $E[X^2] < \infty$ und $E[Y^2] < \infty$, definiert man*

- *die Varianz von X als* $\mathrm{Var}(X) := E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$
- *die Standard Abweichung von X als* $\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$
- *die Kovarianz von X und Y als* $Cov(X) := E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$
- *die Korrelation von X und Y als*

$$\rho(X,Y) := \begin{cases} \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} & \textit{falls } \sigma(X)\sigma(Y) > 0 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung 2 Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, so dass $E[X_1^2], \ldots, E[X_n^2] < \infty$. Dann hat man

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Insbesondere,

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2).$$

Bemerkung 3 Seien X und Y Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, so dass $E[X^2] < \infty$ und $E[Y^2] < \infty$. Es folgt aus der Cauchy–Schwarz Ungleichung, dass

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y),$$

und deswegen,

$$-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1.$$