Zweistichproben-Tests für Normalverteilungen

1 Gepaarte Zweistichproben-Tests

Seien $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots Y_n$ Zufallsvariablen, so dass $(X_1, Y_1) \cdots (X_n, Y_n)$ natürliche Paare bilden. Bezeichne $Z_1 = X_1 - Y_1, \ldots, Z_n = X_n - Y_n$.

Beispiel: *Wenn $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$-verteilt sind und $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$-verteilt, so dass $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig sind, dann sind $Z_1, \ldots, Z_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$-verteilt. Falls σ_X und σ_Y bekannt sind, ist auch $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ bekannt. Falls σ_X und σ_Y nicht beide bekannt sind, dann ist auch $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ nicht bekannt.*

1.1 Normalverteilung mit bekannter Varianz

Seien $Z_1, \ldots, Z_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\vartheta, \sigma^2)$-verteilt mit bekanntem $\sigma > 0$.

Hypothese H_0**:** $\vartheta = \vartheta_0$ (z.Bsp. $\vartheta_0 = 0$)

Teststatistik:

$$T = \frac{\overline{Z}_n - \vartheta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{unter } P_{\vartheta_0}.$$

Kritische Bereiche zum Niveau $\alpha \in (0,1)$**:**

Alternative H_A	Kritischer Bereich
$\vartheta < \vartheta_0$	$(-\infty, z_\alpha)$
$\vartheta > \vartheta_0$	$(z_{1-\alpha}, \infty)$
$\vartheta \neq \vartheta_0$	$(-\infty, z_{\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, \infty)$

1.2 Normalverteilung mit unbekannter Varianz

Seien $Z_1, \ldots, Z_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt mit unbekanntem $\sigma > 0$.

Hypothese H_0**:** $\mu = \mu_0$ (z.Bsp. $\mu_0 = 0$)

Teststatistik:

$$T = \frac{\overline{Z}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad \text{unter } P_{\mu_0}, \quad \text{wobei } S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z}_n)^2.$$

Kritische Bereiche zum Niveau $\alpha \in (0,1)$**:**

Alternative H_A	Kritischer Bereich
$\mu < \mu_0$	$(-\infty, t_{n-1,\alpha})$
$\mu > \mu_0$	$(t_{n-1,1-\alpha}, \infty)$
$\mu \neq \mu_0$	$(-\infty, t_{n-1,\alpha/2}) \cup (t_{n-1,1-\alpha/2}, \infty)$

2 Ungepaarte Zweistichproben-Tests

Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $N(\mu_X, \sigma_X^2)$-verteilt und $Y_1, \dots, Y_m$ i.i.d. $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$-verteilt so dass $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ alle unabhängig sind.

2.1 Normalverteilungen mit bekannten Varianzen

Seien $\sigma_X, \sigma_Y > 0$ bekannt.

Hypothese H_0: $\mu_X - \mu_Y = \mu_0$ (z.Bsp. $\mu_0 = 0$)

Teststatistik:

$$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{unter } P_{\mu_0}.$$

Spezialfall: Falls $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma > 0$, dann ist

$$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - \mu_0}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{unter } P_{\mu_0}.$$

Kritische Bereiche zum Niveau $\alpha \in (0,1)$:

Alternative H_A	Kritischer Bereich
$\mu_X - \mu_Y < \mu_0$	$(-\infty, z_\alpha)$
$\mu_X - \mu_Y > \mu_0$	$(z_{1-\alpha}, \infty)$
$\mu_X - \mu_Y \neq \mu_0$	$(-\infty, z_{\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, \infty)$

2.2 Normalverteilungen mit unbekannten aber gleichen Varianzen

Seien $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$ für ein unbekanntes $\sigma > 0$.

Hypothese H_0: $\mu_X - \mu_Y = \mu_0$ (z.Bsp. $\mu_0 = 0$)

Teststatistik:

$$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - \mu_0}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2} \quad \text{unter } P_{\mu_0},$$

wobei

$$S^2 := \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$$

für

$$S_X^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \quad \text{and} \quad S_Y^2 := \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y}_m)^2.$$

Kritische Bereiche zum Niveau $\alpha \in (0,1)$:

Alternative H_A	Kritischer Bereich
$\mu_X - \mu_Y < \mu_0$	$(-\infty, t_{n+m-2,\alpha})$
$\mu_X - \mu_Y > \mu_0$	$(t_{n+m-2,1-\alpha}, \infty)$
$\mu_X - \mu_Y \neq \mu_0$	$(-\infty, t_{n+m-2,\alpha/2}) \cup (t_{n+m-2,1-\alpha/2}, \infty)$