z-Test und t-Test

z-Test (Test für den Erwartungswert einer Normalverteilung mit bekannter Varianz)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\vartheta, \sigma^2)$-verteilt für bekanntes $\sigma > 0$.

Hypothese H_0: $\vartheta = \vartheta_0$

Teststatistik:

$$T = \frac{\overline{X}_n - \vartheta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{unter } P_{\vartheta_0}.$$

Sei z_α das α-Quantil der standard Normalverteilung, d.h.

$$\Phi(z_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_\alpha} e^{-x^2/2} dx = \alpha.$$

Wegen Symmetrie hat man: $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.

Z.Bsp. $z_{0.95} \approx 1.645$, $z_{0.05} \approx -1.645$ und $z_{0.975} \approx 1.96$, $z_{0.025} \approx -1.96$

Kritische Bereiche zum Niveau $\alpha \in (0,1)$:

Alternative H_A	Kritischer Bereich
$\vartheta < \vartheta_0$	$(-\infty, z_\alpha)$
$\vartheta > \vartheta_0$	$(z_{1-\alpha}, \infty)$
$\vartheta \neq \vartheta_0$	$(-\infty, z_{\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, \infty)$

t-Test (Test für den Erwartungswert einer Normalverteilung mit unbekannter Varianz)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt für unbekanntes $\sigma > 0$.

Hypothese H_0: $\mu = \mu_0$ (eigentlich: $\Theta_0 = \{\vartheta = (\mu_0, \sigma) : \sigma > 0\}$)

Teststatistik:

$$T = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad \text{unter } P_{\mu_0}, \quad \text{wobei } S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2.$$

Sei $t_{m,\alpha}$ das α-Quantil der t_m-Verteilung, d.h.

$$\int_{-\infty}^{t_{m,\alpha}} f_m(x) dx = \alpha \quad \text{für die Dichte } f_m \text{ der } t_m\text{-Verteilung.}$$

Wegen Symmetrie hat man: $t_{m,\alpha} = -t_{m,1-\alpha}$.

Kritische Bereiche zum Niveau $\alpha \in (0,1)$:

Alternative H_A	Kritischer Bereich
$\mu < \mu_0$	$(-\infty, t_{n-1,\alpha})$
$\mu > \mu_0$	$(t_{n-1,1-\alpha}, \infty)$
$\mu \neq \mu_0$	$(-\infty, t_{n-1,\alpha/2}) \cup (t_{n-1,1-\alpha/2}, \infty)$