

## Lösung 4

1) Nur für die folgenden Wahlen kann man das Produkt bilden:

$A \cdot A$  mit Dimension  $(2, 2) \times (2, 2) = (2, 2)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$A \cdot Y$  mit Dimension  $(2, 2) \times (2, 1) = (2, 1)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$B \cdot A$  mit Dimension  $(3, 2) \times (2, 2) = (3, 2)$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$B \cdot Y$  mit Dimension  $(3, 2) \times (2, 1) = (3, 1)$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$X \cdot A$  mit Dimension  $(1, 2) \times (2, 2) = (1, 2)$ :

$$(3 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (5 \ 5).$$

$X \cdot Y$  mit Dimension  $(1, 2) \times (2, 1) = (1, 1)$ , Ergebnis ist also eine Zahl:

$$(3 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = (8) = 8.$$

$Y \cdot X$  mit Dimension  $(2, 1) \times (1, 2) = (2, 2)$ , Ergebnis ist also eine Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot (3 \ 1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

2) Die Faktoren des Produkts  $X \cdot Y$  haben Formate  $1 \times 2$  und  $2 \times 1$ , das Ergebnis ist vom Format  $1 \times 1$ , es ist also eine Zahl:

$$(3 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = (8) = 8.$$

Das Produkt  $Y \cdot X$  hat dagegen Faktoren mit Formaten  $2 \times 1$  und  $1 \times 2$ , das Ergebnis ist also eine  $2 \times 2$ -Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot (3 \ 1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

Da wir  $XY = (8)$  schon wissen, folgt  $(XY)^2 = (8^2) = (64) = 64$

Der Ausdruck  $X^2 \cdot Y^2$  ist dagegen nicht definiert, denn schon  $X^2 = X \cdot X$  gibt es nicht wegen unpassender Formate. Insbesondere gilt für Matrizen *nicht* die Regel  $(AB)^2 = A^2B^2$ .

Das Quadrat der Summe ist

$$(A + C)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},$$

andererseits ist aber

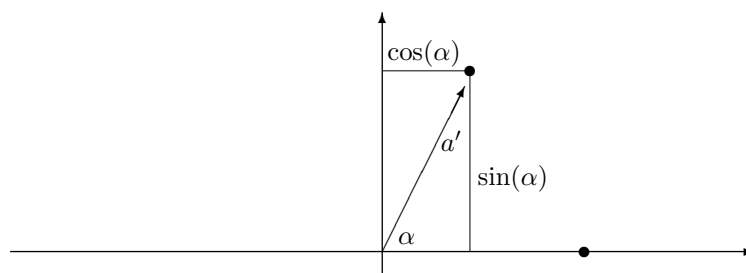
$$A^2 + 2AC + C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2 + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Also gilt für beliebige Matrizen *nicht* die Regel  $(A + C)^2 = A^2 + 2AC + C^2$ .

Diese Regel gilt nur, wenn man  $A$  und  $B$  im Produkt vertauschen darf, also  $AB = BA$  ist. Denn nur dann bekommt man durch Ausmultiplizieren

$$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A(A + B) + B(A + B) = AA + AB + BA + BB = A^2 + 2AB + B^2.$$

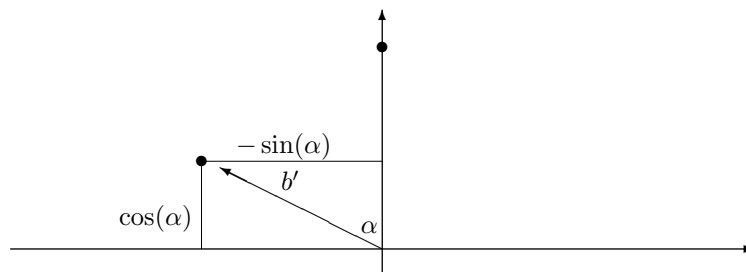
- 3) Zu a): Der durch  $a$  vom Ursprung aus markierte Punkt mit  $x$ -Koordinate 1 und  $y$ -Koordinate 0 in der Zeichenebene wird durch Drehung um den Winkel  $\alpha$  in den Punkt  $a'$  überführt:



Da die Hypotenuse die Länge 1 besitzt, hat der neue Punkt die  $x$ -Koordinate  $\cos(\alpha)$  und die  $y$ -Koordinate  $\sin(\alpha)$ . Das passt zu

$$a' = D_\alpha \cdot a = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Für den Punkt  $b$  mit  $x$ -Koordinate 0 und  $y$ -Koordinate 1 hat der um  $\alpha$  gedrehte Punkt  $b'$  die  $x$ -Koordinate  $-\sin(\alpha)$  und die  $y$ -Koordinate  $\cos(\alpha)$ :



passend zu

$$b' = D_\alpha \cdot b = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Zu b): Das Produkt  $D_\alpha \cdot D_\beta$  multipliziert mit einem Vektor  $c$  dreht diesen erst um den Winkel  $\beta$ , und dann um den Winkel  $\alpha$ , also insgesamt um den Winkel  $\alpha + \beta$ . Damit ist  $D_\alpha \cdot D_\beta = D_{\alpha+\beta}$ . Ebenso ist  $D_\alpha^k$  eine Matrix, die den Vektor  $c$  genau  $k$ -mal um den Winkel  $\alpha$  dreht, also um den Winkel

$k \cdot \alpha$ , somit  $D_\alpha^k = D_{k\alpha}$ . Die inverse Matrix  $D_\alpha^{-1}$  wirkt wie die Umkehrung von  $D_\alpha$ , es ist diejenige Matrix welche die Drehung um  $\alpha$  wieder rückgängig macht, also die Drehung um  $-\alpha$ , somit  $D_\alpha^{-1} = D_{-\alpha}$ .

Zu c): Die Drehmatrix ist symmetrisch, wenn  $D_\alpha^T = D_\alpha$  gilt, das ist wegen des Vorzeichens oben rechts aber nur möglich, wenn  $\sin(\alpha) = 0$  ist, der Wert  $\cos(\alpha)$  auf der Diagonalen spielt keine Rolle. Der Sinus ist Null falls  $\alpha$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist (bzw.  $0^\circ$  und  $180^\circ$  im Gradmass). Umgekehrt ist  $D_\alpha^T = -D_\alpha$  genau dann, wenn  $\cos(\alpha) = 0$  ist, nun spielt der Sinus keine Rolle. Das ist der Fall falls  $\alpha - \frac{\pi}{2}$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist (bzw.  $90^\circ$  und  $270^\circ$  im Gradmass).

### Multiple Choice Aufgabe

1. Die Lösungsmenge ist ein (eventuell nulldimensionaler) Unterraum.

(a) Richtig.

✓ (b) Falsch.

Nein. Bei einem Unterraum gilt (unter anderem), dass für jeden Vektor  $y$  im Unterraum auch  $\lambda y$  im Unterraum liegt, für beliebiges  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Nehmen wir einen Vektor  $y$ , für den  $Ay = b$  gilt, und betrachten  $\lambda y$ . Für dieses gilt  $A(\lambda y) = \lambda(Ay) = \lambda b$ , also ist dies keine Lösung von  $Ax = b$ .

2. Die Menge der Differenzen von zwei Lösungen ist (leer oder) ein Unterraum.

✓ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Ja. Wenn  $Ax = b$  keine Lösungen hat, ist die Aussage trivial. Ansonsten folgt aus  $Ax = b$  und  $Ay = b$  für die Differenz  $z = x - y$  dass  $Az = 0$ . Umgekehrt gilt für jedes  $z$  mit  $Az = 0$ , dass  $x = y + z$  die Gleichung  $Ay = b$  erfüllt, falls  $Ax = b$  gilt. Also ist  $z = x - y$  die Differenz von zwei Lösungen.

Demnach ist die Menge der Differenzen identisch zur Lösungsmenge von  $Ax = 0$ . Dies ist ein Vektorraum.

Es seien  $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(6)}$  Vektoren im  $\mathbb{R}^4$ . Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

3. Diese Vektoren spannen den  $\mathbb{R}^4$  auf.

(a) sicher

Nein, es könnten alle Vektoren gleich dem Nullvektor sein.

✓ (b) möglicherweise

(c) sicher nicht

Falls die Liste z.B. die Standard-Basisvektoren  $(1, 0, 0, 0)^T$ ,  $(0, 1, 0, 0)^T$ ,  $(0, 0, 1, 0)^T$  und  $(0, 0, 0, 1)^T$  enthält, dann wird der ganze  $\mathbb{R}^4$  aufgespannt.

4. Diese Vektoren sind linear unabhängig.

(a) sicher

Nein. Wären die Vektoren linear unabhängig, so hätte für die Matrix  $A$ , welche diese Vektoren als Spalten hat, das homogene Gleichungssystem  $Ax = 0$  nur die triviale Lösung. Mit dem Gaußalgorithmus sieht man aber, dass ein System mit 4 Gleichungen und 6 Unbekannten in jedem Fall mindestens zwei freie Variablen besitzt.

(b) möglicherweise

Nein. Wären die Vektoren linear unabhängig, so hätte für die Matrix  $A$ , welche diese Vektoren als Spalten hat, das homogene Gleichungssystem  $Ax = 0$  nur die triviale Lösung. Mit dem Gaußalgorithmus sieht man aber, dass ein System mit 4 Gleichungen und 6 Unbekannten in jedem Fall mindestens zwei freie Variablen besitzt.

✓ (c) sicher nicht

Richtig. Wären die Vektoren linear unabhängig, so hätte für die Matrix  $A$ , welche diese Vektoren als Spalten hat, das homogene Gleichungssystem  $Ax = 0$  nur die triviale Lösung. Mit dem Gaußalgorithmus sieht man aber, dass ein System mit 4 Gleichungen und 6 Unbekannten in jedem Fall mindestens zwei freie Variablen besitzt.

5. Eine beliebige Auswahl von 4 dieser Vektoren ist eine Basis des  $\mathbb{R}^4$ .

(a) sicher

Nein, die Auswahl könnte einen Vektor mehrfach enthalten, oder den Nullvektor enthalten.

✓ (b) möglicherweise

Richtig, falls die Auswahl z.B. aus den Standard-Basisvektoren  $(1, 0, 0, 0)^T$ ,  $(0, 1, 0, 0)^T$ ,  $(0, 0, 1, 0)^T$  und  $(0, 0, 0, 1)^T$  besteht.

(c) sicher nicht

Nein, die Auswahl könnte gerade aus den Standard-Basisvektoren  $(1, 0, 0, 0)^T$ ,  $(0, 1, 0, 0)^T$ ,  $(0, 0, 1, 0)^T$  und  $(0, 0, 0, 1)^T$  bestehen.

6. Ein Vektor habe bezüglich der Basis  $B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$  den Koordinatenvektor  $(-1, -1)^T$ .  
Der Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis ist ...

(a)  $(\frac{1}{2}, 0)^T$

(b)  $(-1, -1)^T$

(c)  $(0, -2)^T$

✓ (d)  $(2, 0)^T$

(e)  $(1, 1)^T$

Wenn Basisvektoren  $b^{(1)}, \dots, b^{(n)}$  im  $\mathbb{R}^n$  und Koordinatenvektor  $(k_1, \dots, k_n)^T$  eines Vektors  $k$  gegeben sind, so bedeutet das, dass  $k = k_1 b^{(1)} + \dots + k_n b^{(n)}$ . Hier sind wir im  $\mathbb{R}^2$ , und haben als Basis die beiden Vektoren  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ . Der Vektor mit Koordinaten  $(-1, -1)$  bezüglich dieser Basis ist also  $-1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , hat also bezüglich der Standard Basis die Koordinaten  $(2, 0)$ .